Wittgenstein und sein Einfluß auf die gegenwärtige Philosophie, Akten des 2. Internationalen Wittgenstein-Symposiums, Kirchberg

S. 199-201 THE FORMAL EXPLICATION OF THE CONCEPT OF ANTINOMY (1977)

Werner Schimanovich and Peter Weibel, both Vienna (Austria)

"Contradiction destroys the calculus -what gives it this special position? With a little imagination, I believe, it can certainly be demolished."
(Remarks on the Foundations of Mathematics 107e)

ABSTRACT

Wittgenstein's "aim is to alter the attitude to contradiction and to consistency proofs" towards a more relativistic attitude. He argues against "the superstitious fear and awe of mathematicians in face of contradiction" and for a purposive utility under an operative perspective.

The paper under consideration tries to show a possible way of how to work with inconsistent calculi in order to realize and measure their degree of contradictability. Antinomies or logical paradoxes (we consider both expressions as synonymous) represent a contradiction per se. They are a "primary-falsum", relative to a correct standard deduction system S (or to a point of reference). The expression "primary-" or "direct-falsum" means in this case that no contradiction occurs in the derivation of the antinomy itself. (In this way it differs from any false formula.) This conception will be defined in several ways from a formal and exact standpoint. The inductive definition requires e.g. that no antinomy which has been derived in fewer steps appears in the derivation (not even as a partial formula).

In order to investigate a system's degrees of contradictability in a better way we introduce the concept of partial consistency which is not only relevant for mathematical systems, especially for set theory, but also for deontic, epistemic, and linguistic systems. To effect a suitable valuation of these degrees we define measures of consistency and - more relevant - of antinomy, e.g. as limes of the relative frequency of antinomies enumerated by an algorithm in one case and derivable in n steps in another.

The formal explication of the concept of antinomy together with the measure based upon it and its generalization, the partial consistency, allow for the first time an integrative view of this metamathematical discipline.

FORMALE EXPLIKATION

Bei der formalen Ausführung dieser Konzepte erhält man folgende Definition: (Def 1) Eine Antinomie A ist ein Falsum $\mathfrak{f}$, welches in einem Beweis $\mathbb{B}$ hergeleitet werden kann, derart, daß in keinem Teilschritt des Beweises bereits Falsum hergeleitet wird. $\mathrm{Ant}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{f} \;\&\; \exists \mathbb{B} \exists n : \vdash^{n}_{\mathbb{B}} \mathfrak{A} \;\&\; \forall m < n \nvdash^{m}_{\mathbb{B}} \mathfrak{Ant}$

Da diese erste einfache Definition noch zu ungenau ist und bewirkt, daß jede Antinomie eine Klasse deduktionsäquivalenter Formeln repräsentiert, verfeinern wir sie rekursiv zu (Def 2) Eine Antinomie n-ter Stufe ist ein (Primär-) Falsum (der Form $A \wedge \neg A$), welches in einem Beweis $\mathbb{B}$ in n Schritten hergeleitet werden kann [in weniger Schritten jedoch nicht] , derart, daß für alle i und j kleiner als n, alle Formeln und alle Antinomien i-ter

Stufe $\mathcal{L}$ gilt: im Beweis $\mathbb{B}$ ist in j Schritten keine Formel $\mathfrak{B}(\mathcal{L})$ ableitbar, wo eine beliebige Teilformel durch die i-stufige Antinomie $\mathcal{L}$ ersetzt wurde. Eine Antinomie schlechthin ist klarerweise eine mehrstufige für ein passendes n.

$$\mathrm{Ant}_n(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \equiv \lambda \;\&\; \exists \mathbb{B} : \vdash^{n}_{\mathbb{B}} \mathfrak{A} \;\&\; \forall i, j < n \; \forall \mathfrak{B},\ \mathrm{Ant}_i\, \mathcal{L} : \nvdash^{j}_{\mathbb{B}} \mathfrak{B}(\mathcal{L})$$
$$\mathrm{Ant}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \exists n : \mathrm{Ant}_n(\mathfrak{A})$$

Streicht man in (Def 2) die eckigen Klammern [,] , so erhält man eine weitere Verschärfung.

$$\text{(Def 3)}\quad \mathrm{Ant}^{min}_{n}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \mathrm{Ant}_n(\mathfrak{A}) \;\&\; \nexists k < n : \mathrm{Ant}_k(\mathfrak{A})$$
$$\mathrm{Ant}^{min}(\mathfrak{A}) \leftrightarrow \mathrm{Ant}(\mathfrak{A})$$

Für verschiedene Zwecke benötigt man eine endliche Anzahl von Antinomien einer bestimmten Stufe n. Daher verwenden wir eine beschränkte oder inzisive Ableitbarkeit $\vDash$, wo nur endliche Formelmengen generiert werden können. Inzisiv nennen wir diese Deduktion $\vDash$ deshalb, weil durch Beschränkung der (logischen und spezifischen) Axiomenschemata mittels induktiv aufgebauter Formeln einer gewissen Tiefe die Anzahl der Axiome (und Regelanwendungen) erst von Schritt zu Schritt wächst.

(Def 4) Ersetzen wir in (Def 3) die übliche Ableitbarkeit $\vdash$ durch die inzisive $\vDash$ bzw. $\vDash^{n}$, so erhalten wir den Begriff der Inzisiv-Antinomie Ant^{I}_{n} (.) der Stufe n.

$$\mathrm{Ant}^{I}_{n}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \equiv \lambda \;\&\; \exists \mathbb{B} \vDash^{n}_{\mathbb{B}} \mathfrak{A} \;\&\; \forall i, j < n \forall \mathfrak{B}, \mathrm{Ant}^{I}_{i}\, \mathcal{L} : \nvDash^{j}_{\mathbb{B}} \mathfrak{B}(\mathcal{L}) \;\&\; \nexists k < n : \mathrm{Ant}^{I}_{k}(\mathfrak{A}).$$
$$\mathrm{Ant}^{I}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \exists n : \mathrm{Ant}^{I}_{n}(\mathfrak{A})$$

Diese Definitionen erlauben uns, den Begriff der Widerspruchsfreiheit zu verallgemeinern zur Partial-Konsistenz, um auch mit "leicht" widersprüchlichen, in der Praxis aber bewährten Kalkülen arbeiten zu können (z. B. Naive Mengenlehre). Für eine brauchbare Berechnung des Grades der Widersprüchlichkeit oder der Widerspruchswahrscheinlichkeit benötigen wir Konsistenz-Maße oder die effektiveren Antinomitäts-Maße, welche die Fehlerwahrscheinlichkeit angeben, mit der man bei gleicher Wahrscheinlichkeit aller möglichen Ableitungsschritte ein (antinomisches) Falsum erhält.

Wollen wir solche Maße als Grenzwert der relativen Häufigkeit von Kontradiktionen bzw. Antinomien konstruieren, müssen wir zuerst den Basis-Kalkül in einen Algorithmus umbauen und den falschen Formeln den Wert 0 zuordnen.

(Def 5) Sei $\mathfrak{A}_{\underline{A}\,i}$ die vom Algorithmus A in i Schritten abgeleitete Formel und $T(\mathfrak{A}_{\underline{A}\,i})$ ihr "Pseudo-Wahrheitswert", d. h. 0, falls $\mathfrak{A}_{\underline{A}\,i} \equiv \lambda$, und 1 sonst. Dann bedeute das Konsistenz-Maß

$$c_1 = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} T(\mathfrak{A}_{\underline{A}\,i})/n$$

Ersetzt man A durch den Algorithmus A', der aus A hervorgeht, indem die bereits abgeleiteten Kontradiktionen nicht mehr als Prämissen verwendet werden, erhält man ein "Nomitätsmaß" n'_1.

(Def 6) Das korrespondierende Antinomitätsmaß lautet

$$a'_1 = \lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} F(\mathfrak{A}_{\underline{A'}\,i}) \qquad \text{wo } F(\mathfrak{A}) = 1 - T(\mathfrak{A})$$

Da jedoch der Limes gar nicht zu existieren braucht und eine passende Umordnung der 0-1-Folge jeden beliebigen Limes zwischen 0 und 1 liefert, konstruieren wir Maße, die vom zugrunde gelegten Algorithmus unabhängig sind.

(Def 7) $a_2 = \lim\limits_{n \to \infty} n^{-1} \cdot \mathrm{Card}\, \{\mathfrak{A} : \mathrm{Ant}^{\mathrm{I}}_{m \leq n}(\mathfrak{A})\}$

Diese kumulierte relative Antinomien-Häufigkeit (eventuell noch) mit einem passenden Normierungs-Faktor multipliziert) kann auch im Verhältnis zur Gesamtheit der inzisiv abgeleiteten Formeln festgesetzt werden:

$$(\text{Def } 8)\; a_3 = \lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{Card}\, \{\mathfrak{A} : \mathrm{Ant}^{\mathrm{I}}_{m \leq n}\, \mathfrak{A}\}}{\mathrm{Card}\, \{\mathfrak{B} : \vdash^{m \leq n} \mathfrak{B}\}}$$

Obwohl die Formelmengen durch die beschränkte Ableitbarkeit nie unendlich werden können, werden die Maße vielleicht dadurch adäquater charakterisiert, indem die einzelnen Antinomien $\mathfrak{A}$ der Form $A \wedge \neg A$ mit ihren inzisiv deduktions-äquivalenten Formeln zu einer Klasse $[\mathfrak{A}]$ zusammengefaßt werden, ebenso beliebige Formeln $\mathfrak{B}$.

$$(\text{Def } 9)\; a_4 = \lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{Card}\, \{[\mathfrak{A}] : \mathrm{Ant}^{\mathrm{I}}_{m \leq n}\, \mathfrak{A}\}}{\mathrm{Card}\, \{[\mathfrak{B}] : \vdash^{m \leq n} \mathfrak{B}\}}$$

Parallel dazu erhalten wir Inkonsistenz-Maße, indem wir $\mathrm{Ant}^{\mathrm{I}}_{m \leq n}\mathfrak{A}$ durch $\vdash^{m \leq n} \mathfrak{A} \wedge \neg \mathfrak{A}$ ersetzen, und als Definitionsvarianten können wir die besprochenen kumulierten Maße auch einfach mittels $\mathrm{Ant}^{\mathrm{I}}_{n}$ und $\vdash^{n}$ festlegen.

Dieses Konzept der Partial-Konsistenz und ihrer Maße läßt sich auch auf Programmiersprachen und Programme anwenden und stellt ein gewisses Gegenstück zur Komplexitätstheorie der rekursiven Funktionen dar.