Gödel-Satz, Möbiusschleife, Computer-Ich = Franz Kreuzer (1987), Wien

Peter Weibel/Eckehart Köhler
Gödels Unentscheidbarkeitsbeweis Ideengeschichtliche Konturen eines berühmten mathematischen Satzes

(1986)

[72–101]

Eine der bedeutendsten mathematisch-logischen Entdeckungen der Neuzeit, „der Satz des Jahrhunderts", wie sie oft apostrophiert wird, stammt nicht von Ludwig Wittgenstein, wie vielleicht manche vermuten würden, sondern von einem anderen Wiener, der bis vor kurzem einer breiteren Öffentlichkeit wie auch dem Kulturpublikum vollkommen unbekannt war, obwohl dieser „Satz" schon in den dreißiger Jahren publiziert worden ist. Es war ein 25jähriger junger Wiener, der 1931 eine Arbeit veröffentlichte, seit welcher „der Gegenstand der Logik niemals mehr der gleiche sein wird" (Johann von Neumann). Sie trug den Titel „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I"; ihr Autor: Kurt Gödel. Um ihre Wirkung zu verstehen – und diese war so überwältigend, daß Georg Kreisel sich genötigt sah, seinen brillanten Nachruf[1] auf Gödel mit dem Satz zu eröffnen: "Kurt Gödel did not invent mathematical logic" –, muß der ideengeschichtliche Hintergrund skizziert werden, aus dem Gödels Arbeit kam. Denn ein Teil ihrer Wirkung bestand ja darin, daß sie auf Fragen und Probleme, die im ersten Viertel des zwanzigsten Jahrhunderts zum Thema der Grundlegung von Logik und Mathematik aufgetaucht waren, unzweifelhaft klare Antworten gab.

Die Rezeption von Gödels Arbeit von 1931 erfolgte in zwei Wellen: Zuerst im Gefolge des Widerstreits zur Fundierung der Mathematik, der in den zwanziger Jahren von drei Schulen geführt wurde, wovon David Hilberts Programm des Formalismus, auf das Gödel direkt Bezug nahm, das berühmteste war. Dann anfangs der sechziger Jahre eine zweite Wirkungswelle zum Thema Geist und Maschine, Mensch und Computer, künstliche Intelligenz. Diese zweite, von der beginnenden Computerkultur getragene Welle schwemmte die Gödelschen Resultate auch in das Bewußtsein einer breiteren Öffentlichkeit[2], wenn auch oft in Form von spekulativen und sensationalistischen Präsentationen durch Philosophen, Schriftsteller und Journalisten.

Das problemgeschichtliche (Vor)feld

Kurt Gödel wurde am 28. April 1906 in Brünn, Teil der österreichisch-ungarischen Monarchie, geboren und begann 1924 seine physikalischen, später vorwiegend mathematischen und logischen Studien an der Universität Wien, wo er 1930 mit der Arbeit „Über die Vollständigkeit des Logikkalküls" promovierte, worin er seine Meisterschaft in der Behandlung der aktuellsten Probleme der logischen Grundlagenforschung erwies. Sie war auch eine Art Voraussetzung für seine Arbeit über die „Unvollständigkeit" (1931), die 1932 als Habilitationsschrift approbiert wurde und über die Hans Hahn, neben Karl Menger (Sohn des Nationalökonomen Carl Menger) sein wichtigster Lehrer, schrieb:

> Die Habilitationsschrift „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I" ist eine Leistung ersten Ranges, die in allen Fachkreisen das größte Aufsehen erregte und – wie sich mit Sicherheit voraussehen läßt – ihren Platz in der Geschichte der Mathematik einnehmen wird. Es gelang Herrn Gödel zu zeigen, daß sich im logischen System der *Principia Mathematica* von Whitehead-Russell Probleme angeben lassen, die mit den Mitteln dieses Systems unentscheidbar sind, und daß dasselbe für jedes formallogische System gilt, in dem die Arithmetik der natürlichen Zahlen ausdrückbar ist; damit ist auch gezeigt, daß das von Hilbert aufgestellte Programm, die Widerspruchsfreiheit der Mathematik zu beweisen, undurchführbar ist.[3]

Neben dem Zahlentheoretiker Philipp Furtwängler (Vetter des Dirigenten Wilhelm Furtwängler), dem Analytiker Hans Hahn und dem Mathematischen Kolloquium von Karl Menger gehörte der Wiener Kreis (1923–1938) um Moritz Schlick, dessen Sitzungen Gödel häufig beiwohnte, wenngleich er dort selten sprach, zu den einflußreichsten Anregern und Faktoren zur Ausbildung von Gödels mathematisch-logischer Leistung.

Der Wiener Kreis, dem Philosophen, Mathematiker, Logiker und Ökonomen wie Rudolf Carnap, Herbert Feigl, Philipp Frank, Viktor Kraft, Friedrich Waismann, Felix Kaufmann, Otto Neurath, Hans Hahn, Karl Menger, Marcel Natkin, Bela Juhos und andere angehörten und zu dessen Umfeld auch Ludwig Wittgenstein, Karl Popper, Richard von Mises, Carl Gustav Hempel und andere zu zählen sind und der besuchte wurde von Willard V. O. Quine, Alfred Ayer, Arne Naess, Eino Keila, Ernest Nagel und anderen, diskutierte regelmäßig einmal in der Woche alle Fragen auf dem Gebiet der Philosophie, der Grundlagen der Mathematik, der symbolischen Logik und der Physik im Geiste eines an der Mathematik orientierten antimetaphysischen logischen Formalismus. In diesem höchsten Klima eines geistigen Diskurses, in dem die aktuellsten Neuerscheinungen besprochen und eingeladene Vortragende wie Alfred Tarski, Johann von Neumann und L. E. J. Brouwer (die von Karl Menger zu seinem Kolloquium eingeladen wurden) über ihre jüngsten Forschungsergebnisse berichteten, konnte sich eine Begabung wie Gödel, zumal von seinen Lehrern wie Menger vorzüglich betreut und mit Kollegen wie Carnap in Diskussionen die Probleme in ihre tiefsten und feinsten Verzweigungen erörternd, rasch entfalten.

Zu den bekanntesten Standpunkten der Erkenntnistheorie der Mathematik im ersten Viertel des zwanzigsten Jahrhunderts gehören die drei verschiedenen Schulen der Grundlegung der Mathematik: der Logizismus, der Intuitionismus und der Formalismus. Sie versuchten eine Antwort auf die in der Mathematik aufgetauchten Antinomien (Widersprüche) zu liefern.

Der *Logizismus* (Richard Dedekind, Gottlob Frege, Bertrand Russell, Alfred North Whitehead, Rudolf Carnap) geht davon aus, daß die Begriffe der Mathematik durch detaillierte Definitionen von logischen Begriffen abgeleitet werden können, daß die Mathematik also als ein Teil der Logik dargestellt werden kann. Betreffend die Natur der mathematischen Wahrheit hoffte der Logizismus, entgegen Kant zeigen zu können, daß die Mathematik nur mit reinen Beziehungen zwischen Begriffen beschäftigt ist und daß diese Beziehungen „analytisch" sind.

Durch das berühmte klassische Werk von Whitehead und Russell *Principia Mathematica* (1910–1913) hatte der Logizismus immerhin jene große Leistung erbracht, einen Großteil der klassischen Mathematik in ein einziges formales System zu gießen. Durch die klare Formalisierung kommt man einen Schritt näher zur Widerspruchsfreiheit, die das hauptsächliche Grundlageninteresse Hilberts war.

Der frühe Wittgenstein beispielsweise glaubte in seinem *Tractatus logico-philosophicus* ebenfalls noch daran, daß Mathematik und Logik untrennbar seien und daß diese sich im Aussagenkalkül erschöpfe, also in einem Teil der Sprache. Zu Recht nennt daher Georg Kreisel den *Tractatus* „ein metaphysisches Gedicht über den Aussagenkalkül".[4]

Begriffe wie Beweis, Beweisverfahren (Verifikation, Falsifikation, konstruktiv, effektiv), Metamathematik, Modell, definierbar, Widerspruchsfreiheit (und ihr Gegenteil wie logische und semantische Antinomien), formale Regel und so weiter wurden also erst in den zwanziger Jahren mit heutiger Exaktheit erörtert. Ebenso klar wurde durch den Logizismus, daß die Gefährdung der logischen Fundierung der Mathematik durch Widersprüche, insbesondere jene aus der Unendlichkeit und der Mengenlehre abgeleiteten Antinomien, überwindbar ist. Durch Gödels Beweis aber verlor die Bereinigung der Grundlagenkrise der Mathematik schlagartig an Interesse, da Gödel ganz neue Probleme aufwarf.

Der *Intuitionismus* (L. E. J. Brouwer, Arend Heyting, Hermann Weyl, Oskar Becker) geht davon aus, daß wir durch keine endliche Anzahl von Axiomen all das charakterisieren können, was wir intuitiv als korrekte Beweismethoden anerkennen, da zum Beispiel die Zahlentheorie selbst ja erst ein Begriff ist, der im Prozeß des Entstehens ist. Für den Intuitionisten ist die Mathematik eine Produktion des menschlichen Geistes.

Er benützt die natürliche und formalisierte Sprache nur dazu, um Gedanken zu kommunizieren, um andere oder sich selbst dazu zu bringen, seinen eigenen mathematischen Ideen zu folgen. Daher ist so eine sprachliche Begleitung keine Repräsentation der Mathematik, geschweige die Mathematik selbst.[5]

Der wichtigste Baustein der intuitionistischen Konstruktion der Mathematik ist der Begriff der Einheit und dann „Zwei-einigkeit" (Brouwer). Die ganzen Zahlen müssen als Einheiten behandelt werden, die sich nur durch ihren Platz in der Reihe der ganzen Zahlen voneinander unterscheiden. Die „Zwei-einigkeit" bedeutet das Moment des Klassifizierens beziehungsweise Zählens in der Zeit. Der Intuitionist hat daher zum Unendlichen jene Einstellung, daß jede Aussage über eine unendliche Struktur, da die Zahlen keine wohldefinierte Totalität sind, nur auf der Basis verifizierbarer Aussagen bewiesen werden kann, die entweder über einen endlichen Teil dieser Struktur oder über die Regeln für die Produktion aller Zahlen und Strukturen aus den endlichen anfänglichen Segmenten einer Struktur gemacht werden können. Die Idee eines infiniten Modells, eine tatsächlich existierende, wohldefinierte unendliche Sammlung von Objekten, welche die Axiome eines formalen Systems befriedigen, ist daher für einen Intuitionisten ebensowenig akzeptabel, wie auch für ihn das Gesetz des ausgeschlossenen Dritten für unendliche Bereiche nicht gilt, was soviel bedeutet, daß er die Formel, daß eine Aussage entweder wahr oder falsch ist, aber nichts Drittes sein kann, nicht akzeptiert. Zum Beispiel kann man in der klassischen Mathematik auf die Existenz eines *unendlichen* Modells schließen, wenn man (a) die Widerspruchsfreiheit einer Struktur und (b) die Unmöglichkeit eines *endlichen* Modells bewiesen hat, auf Grund eben des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten; aber gerade dieser Schritt gilt für einen Intuitionisten *nicht.* Aus diesen beiden genannten Gründen taucht für den Intuitionisten das Problem der Konsistenz (Widerspruchsfreiheit) nicht auf. Für ihn hat die Einführung eines Formalismus angesichts seines minimalen praktischen Wertes und der seriösen Komplikationen, zu denen er führt, wenig Sinn. Der Intuitionismus enthält daher keine willkürlichen Annahmen und künstlichen Beschränkungen, die beispielsweise notwendig sind, um die logischen Paradoxien auf Grund eines hochgepäppelten mengentheoretischen Begriffssystems zu vermeiden.

Der *Formalismus* (David Hilbert, Johann von Neumann, Haskell B. Curry) hingegen hatte als höchstes Ideal gerade Widerspruchsfreiheit und Methodenreinheit, die er zu erreichen trachtete, indem er den Gebrauch infiniter Begriffe in der Mathematik durch finitäre Überlegungen betreffend Beweise rechtfertigte.
Da Hilberts (auf den Frege-Russellschen formalen Systemen basierende) Beweistheorie nur die endlich großen Sätze und endlich langen Beweisführungen der Mathematik zuläßt, nannte man sie *finit*. Stephen Cole Kleene übersetzte den Terminus finit mit *finitary*, um Verwechslungen mit dem englischen Wort *finite* zu vermeiden. Man beachte, daß mit den finitären Methoden auch unendliche Bereiche konstruiert werden können, jedoch nur durch endliche Prozesse. Hilberts Formalismus will die Widerspruchsfreiheit der Mathematik erweisen, indem er eine Menge von Postulaten konstruiert, von denen die ganze Mathematik durch rein formales Räsonieren abgeleitet werden soll. Dabei muß auch gezeigt werden, daß diese Postulate zu keinem Widerspruch führen.
Da sich Hilbert einerseits aus Georg Cantors Paradies, der Mengenlehre mit ihrem potentiellen und aktualen Unendlichen, nicht vertreiben lassen wollte[5a], mußte er andererseits den Gebrauch der transfiniten Maschinerie von einem finitistischen (endlich konstruktiven) Standpunkt aus als erlaubt (weil zu keinem Widerspruch führend) nachweisen. In der Beseitigung der transfiniten Schlußweisen aus den Beweisen (von Formeln, die sehr wohl infinite Symbole enthalten dürfen) sah er diese Möglichkeit, denn wenn schon der Gehalt einer klassischen mathematischen Aussage nicht immer finit verifiziert werden kann, so könne es zumindest ihre Widerspruchsfreiheit.
Wenn wir daher die Gültigkeit der klassischen Mathematik zu beweisen wünschen, dann müssen wir nicht Aussagen, sondern Beweismethoden untersuchen. Wir müssen die klassische Mathematik rein syntaktisch als ein kombinatorisches Spiel mit primitiven Symbolen betrachten und in einer finitären kombinatorischen Weise bestimmen, zu welchen Kombinationen von komplexen Symbolen die Konstruktionsmethoden oder Beweise führen.
Um zu zeigen, daß die inhaltlich beweisbaren Aussagen der klassischen Mathematik auch mit finitären Methoden bewiesen werden können, mußte Hilberts Beweistheorie also ein Konstruktionsverfahren zur Verfügung stellen, das befähigt, sukzessive alle Formeln zu konstruieren, die den inhaltlich beweisbaren Aussagen der klassischen Mathematik entsprechen. Hat ein System von evidenten Grundaussagen (Axiomensystem) diese Eigenschaft (nämlich daß alle inhaltlich wahren Sätze auch formal auf Grund eines endlichen Regelsystems abgeleitet werden können), dann spricht man von der *Vollständigkeit* dieses Systems. Die formale Unbeweisbarkeit (zum

Beispiel der Formel $1 = 2$) durch diese Methoden wird *Konsistenz* (semantische Widerspruchsfreiheit) der Arithmetik genannt. Dieses Problem läßt sich auch syntaktisch formulieren: Wenn wir ein formales System haben, das so weit entwickelt ist, daß wir es axiomatisieren können, dann besteht dessen Konsistenzproblem nur mehr darin, aufzuspüren, ob es mindestens eine Aussage gibt, die *nicht* ableitbar ist, und das eben mit finitären Methoden. (Denn wenn wir nicht einmal $1 = 2$ ableiten können, so ist überhaupt kein sonstiger Widerspruch ableitbar. Wäre umgekehrt ein sonstiger Widerspruch ableitbar, so wäre dann auch $1 = 2$.) Ein Programm, wie Hilbert es vorhatte, das die Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems der klassischen Mathematik auf der Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit jedes ihrer endlichen Subsysteme und ihrer endlichen kombinatorischen Beweismethode aufbauen wollte, beziehungsweise ein formales System, in dem Vollständigkeit und Konsistenz alles sind, wird durch eine einzige wahre, jedoch nicht ableitbare Formel zum Platzen gebracht. Das hat Gödel in seiner Arbeit von 1931 aufgespießt: Ableitbarkeit (= Beweisbarkeit in einem formalen System) ist schwächer als Wahrheit (= Allgemeingültigkeit bei allen Interpretationen).
Hilberts Programm versuchte, eine jahrtausendealte, gleichsam natürliche Vorstellung von der Mathematik zu formalisieren. Hilbert wollte ja zeigen – was ihm jedoch nicht gelang –, daß jede widerspruchsfreie Aussage der Arithmetik durch übliche gültige formale Beweismethoden beweisbar ist, daß also das normale System der Arithmetik vollständig ist. Für engere mathematische Teilsysteme hatte man schon Vollständigkeitsbeweise gefunden, so daß der Traum, die inhaltliche Wahrheit von Sätzen der klassischen Mathematik auf effektive finitäre Prozeduren und formale Beweise zu reduzieren, gerade knapp vor seiner Verwirklichung schien.
Durch Hilberts Finitismus hatte also eine Akzentverschiebung von der Frage nach der Wahrheit einer mathematischen Aussage zur (Entscheidbarkeit beziehungsweise) formalen Beweisbarkeit einer konsistenten Aussage eines mathematischen Systems stattgefunden. Gerade darauf nimmt der Titel von Gödels Arbeit Bezug, in der gerade Hilberts Traum von der Adäquatheit deduktiver Formalismen für die Repräsentation intuitiver Zweige der Mathematik, der Traum des überragendsten Mathematikers der Zeit, zerschellte, weil Gödel formal exakt mit den Mitteln von Hilberts Programm eben die Unmöglichkeit des so gestellten Programms, und zwar schon des Teilprogramms betreffend die Zahlentheorie, bewies. Und das, obwohl Gödel selbst noch ein Jahr vorher in seiner Dissertation von 1930 über „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls" (*Monatshefte für Mathematik und Physik* 37 [1930], S. 349–360)

zu Hilberts Traum beigetragen hat. Denn durch diesen Vollständigkeitsbeweis der Prädikatenlogik (auch „Quantorenlogik" genannt) wurde ein wichtiges, von dem Hilbert-Schüler Ackermann gerade erst 1928 gestelltes Problem gelöst, und zwar so, daß die Mitarbeiter am Hilbertschen Programm Hoffnung für ihre größeren Ziele schöpfen konnten.

Direkte Vorläufer

Wir wollen jetzt kurz die Unvollständigkeit der Arithmetik beiseite lassen und die großen Pionierarbeiten des problemgeschichtlichen Vorfeldes, in dem Gödel den Schlußakkord setzte, diskutieren. Dazu gehören die Arbeiten von Leopold Löwenheim, Paul Bernays, Thoralf Skolem, Emil Leon Post, Johann von Neumann und Jacques Herbrand, die im allgemeinen in Richtung auf Vollständigkeit von Prädikatenlogik und Arithmetik hinzielten.
In der 1915 veröffentlichten Arbeit „Über Möglichkeiten im Relativkalkül" von Löwenheim finden wir nicht nur den ersten Beweis eines limitativen Theorems, sondern auch damals wenig im Trend liegende Begriffe wie Gültigkeit und Entscheidungsmethoden. Löwenheims Theorem zeigt, daß, wenn eine wohlgeformte Formel in einem unendlichen Bereich gültig ist, sie auch im Abzählbaren gültig ist. Für den singulären Prädikatenkalkül erster Ordnung mit Identität (mit nur einer Individuenvariablen in den Prädikaten) erbrachte er die positive Lösung des Entscheidungsproblems. Skolem (1919)[6], Behmann (1922)[7] und Herbrand (1931)[8] simplifizierten und verbesserten Löwenheims Theorem. 1921 publizierte Post erstmals ein Vollständigkeitstheorem über die Aussagenlogik, die erste allgemeine Formulierung für das Vollständigkeitsproblem für Subsysteme der *Principia Mathematica* („Introduction to a General Theory of Elementary Propositions"). Paul Bernays hatte bereits 1918 ein Vollständigkeitstheorem für die Aussagenlogik ausgearbeitet, aber erst 1926 publiziert. 1922 publizierte Skolem erneut eine Verbesserung von Löwenheims Theorem („Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre"), das implizit Gödels Vollständigkeitstheorem von 1930 enthielt. In einer Arbeit „Über die mathematische Logik" (1928) nimmt Skolem Herbrands Fundamentaltheorem vorweg, studiert Entscheidungsprobleme und Beweisverfahren und etabliert die formale Beweisbarkeit, womit er nochmals Gödels Vollständigkeitsresultat von 1930 antizipiert.
Gödel selbst[9] schreibt am 14. August 1964:

> Was Skolem gerechterweise hätte beanspruchen können, aber offensichtlich nicht tat, ist, daß er in seiner Arbeit von 1922 implizit bewiesen hat: entweder A ist beweisbar oder nicht-A ist erfüllbar (beweisbar in einem informellen Sinn). Jedoch, da er dieses Resultat nicht klar formulierte (und offenkundig es auch ihm selbst nicht ganz klar war), scheint dieses Resultat vollkommen unbekannt geblieben zu sein, was aus der Tatsache folgt, daß Hilbert und Ackermann in ihrem Buch von 1928 (Grundzüge der theoretischen Logik) es in Beziehung auf ihr Vollständigkeitsproblem nicht erwähnen,

obwohl ein substantieller Teil ihres Problems dadurch implizit bereits gelöst war. Hilbert und Ackermann hatten nämlich in diesem Buch die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls erster Ordnung zur Frage erhoben in dem Sinne:

> Ob das Axiomensystem zumindest in dem Sinne vollständig ist, daß alle logischen Formeln, die in jedem Individuenbereich wahr sind, auch aktuell abgeleitet werden können, ist eine Frage, die erst zu lösen ist. (S. 68, 1. Auflage.)

In seiner Arbeit „Über die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik" (1931) bewies Herbrand in der bewußten Verfolgung von Hilberts Programm die Konsistenz eines Teilsystems der Arithmetik, in dem die wohlgeformten Formeln, die im Induktionsschema eingesetzt werden können, keine gebundenen Variablen enthalten. Ähnliche Konsistenzbeweise für Teilsysteme der Arithmetik mit starken Einschränkungen hatten auch schon Wilhelm Ackermann („Begründung des tertium non datur mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit". *Math. Ann.* 93, 1924, S. 1–36) und Johann von Neumann („Zur Hilbertschen Beweistheorie". *Mathematische Zeitschrift* 26, 1927, S. 1–46) für die Hilbertsche Schule geliefert. Herbrands Beweis entstand während seines Aufenthalts 1930/31 in Deutschland, zuerst in Berlin bei von Neumann, dann bei Hilbert in Göttingen. Herbrand begann seine Arbeit sicherlich bevor Gödels Beweis von 1931 ihn erreichte, konnte ihn aber noch einarbeiten. Die Arbeit stützt sich auf sein Fundamentaltheorem, das für Bernays „das zentrale Theorem der Prädikatenlogik" ist. Es besagt: Die Aussage A ist keine (immer wahre) Identität dann und nur dann, wenn ein unendlicher Bereich existiert, in dem A falsch ist. Für Herbrand selbst ist dies nur „eine präzisere Formulierung des bekannten Löwenheim-Skolem-Theorems". Gentzen wiederum nannte in seiner Arbeit „Untersuchungen über das logische Schließen" (1934) das Fundamentaltheorem einen Spezialfall seines „verschärften Hauptsatzes".
Herbrand verunglückte mit dreiundzwanzig Jahren bei einer Bergbesteigung tödlich. Sein gesamtes logisches Werk bewegt sich im Rahmen des von Hilbert abgesteckten Feldes der Metamathematik und deren Probleme (Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Entscheidbarkeit). Dies verband ihn mit Gödel. 1931 schrieb er Gödel einen Brief mit dem Vorschlag, alle berechenbaren zahlentheoretischen Funktionen mittels einfacher Gleichungssysteme darzustellen, was Gödel zur Definition der (allgemein) rekursiven Funktion anregte („On undecidable propositions of formal mathematical

systems", Princeton 1934). Herbrand betrachtete sein Fundamentaltheorem als Arithmetisierung der mathematischen Theorien; aber eine Arithmetisierung der Syntax wie Gödel in (1931), wo Zahlen Formeln so zugeordnet werden, daß syntaktische Eigenschaften (wie Beweisbarkeit) mit Eigenschaften von Zahlen korrelieren, hat Herbrand nicht geliefert.

Hilberts Programm

Gödel fing sein Studium des Hilbertschen Programms etwa 1928 an. Einer seiner größten Anreger war sein Lehrer Rudolf Carnap (der 1926 als Dozent in Wien begann), weil Carnap (1928) genau wie Hilbert zunächst einmal daran interessiert war, zwecks einer exakten Analyse der Mathematik ein Begriffssystem zu schaffen, das möglichst die gesamte klassische Mathematik enthalten sollte. Der Ahnherr dieses Anliegens war Leibniz („characteristica universalis", „mathesis universalis"), aber erst Frege schuf 1879 und 1893 mit seiner „Begriffsschrift" das eigentliche Vorbild eines entsprechenden logistischen Systems. Carnap studierte übrigens mehrere Jahre bei Frege in Jena, der auch in seiner Doktoratskommission war. Allerdings wurde Freges „Begriffsschrift" bald durch das viel leichter lesbare System von Whitehead und Russell (*Principia Mathematica* I–III, 1910–1913) abgelöst, das sowohl der Hilbert-Schule wie auch dem Wiener Kreis – einschließlich Carnap und Gödel – als Vorbild diente.

Wir wollen nun langsam auf die Unvollständigkeit der Arithmetik hinsteuern und ihre ideengeschichtlichen Hintergründe erörtern. Hilberts Programm hatte nämlich eine deutlich verschiedene, sogar gewisserweise unverträgliche Zielsetzung mit der Freges und Russells. Die letzteren wollten Logik und Mathematik im Geiste von Leibniz und Bolzano total verschmelzen.

Hilbert und seine Schule hingegen haben sich vielleicht zu wenig überlegt, ob die *sprachlichen* Mittel, die sie von den finiten Vorlagen Freges und Russells übernommen hatten, wirklich für ihre Zwecke ausreichten. Schließlich hatten Frege und Russell ja auch keinen Widerspruchsfreiheitsbeweis vorgenommen. Für ihre Zwecke war die Vollständigkeit auch nicht wesentlich, also daß jeder mathematische Sachverhalt einen entsprechenden Formelausdruck erhalten muß.

Die Sprache ist ja ein endlich kombinatorischer Prozeß, in dem die sprachlichen Zeichen, nach festen Regeln angeordnet, herummanipuliert und verschoben werden. Es gibt daher nur eine begrenzte Anzahl von Formelausdrücken der logischen Sprache; die Mathematiker sagen dazu, es gibt nur abzählbar viele Formeln und daher auch nur abzählbar viele nennbare mathematische Objekte. Im Gegensatz dazu hat die mathematische Anschauung jedoch „viel mehr" Objekte. Ein Mathematiker kann zum Beispiel das ganze Zahlenkontinuum (die Menge der reellen Zahlen) auf seine Anschauungsweise begrifflich wahrnehmen, und dieses ist von überabzählbarer Mächtigkeit. Auch wenn der Mathematiker nicht jede einzelne reelle Zahl benennen kann, so hat er doch wesentlich „mehr" reelle Zahlen (nämlich überabzählbar viele) in seiner Gesamtheit vorhanden, um damit arbeiten zu können.

Gödel stellte also die Frage: Können alle mathematischen Sachverhalte – insbesondere die Sachverhalte der bloßen Zahlentheorie – überhaupt in *irgendeinen* finiten Sprachformalismus abgebildet werden? Zu diesem Gedankengang, dem alle Mitglieder der Hilbert-Schule auswichen, ist Gödel vom Erzfeind des Hilbertschen Programms angeregt worden, von Brouwer, und zwar von einer Rede, die dieser am 10. März 1928 auf Einladung von Gödels Lehrer, Karl Menger, in Wien gehalten hat[10] – bei diesem Vortrag sah übrigens Gödel Wittgenstein, ohne mit ihm zu sprechen, aus der Entfernung und zum einzigen Mal in seinem Leben.[11] Brouwers Rede auf der Wiener Universität war für die Geschichte der Mathematik und der Philosophie äußerst folgenreich. Denn nicht nur, daß Brouwer Gödels Verdacht gegen Hilberts Programm mit ins Rollen brachte – dies, obwohl Gödel viel weiter von Brouwers Intuitionismus entfernt war als Hilbert selber; Brouwers Rede hat auch Wittgenstein angeregt, sich wieder philosophischen Themen zu widmen.[12]

Brouwers Sprachkritik

Brouwer hatte schon vor dem Ersten Weltkrieg den linguistischen Apparat des Frege/Russell-Logizismus bekriegt. Als Intuitionist waren für ihn die gedanklichen Konstruktionen der Rechnungen und die Beweisführungen im Geiste das Wesentliche an der Mathematik. Die sprachliche Verkleidung dieser Konstruktionen, ob zum Zwecke der Erinnerungsstützung oder der Mitteilung, war ihm sekundär, ja geradezu vernachlässigbar. Daß eine so große Autorität wie Hilbert etwas derart Unwichtiges wie die sprachliche Repräsentanz der Mathematik zum zentralen Thema eines Grundlagenprogramms hervorkehrte, erfüllte Brouwer mit Abneigung. In seiner Wiener Rede unterließ er es also nicht, noch einmal auf die Unzuverlässigkeit der Sprache hinzuweisen, was er so darstellte, daß der freie menschliche Geist sich nicht durch ein mechanistisches Sprachgefüge einfangen läßt. (Dies klingt bereits, teilweise sogar wortwörtlich, wie die lange

Zeit diskutierte Hauptvariante der philosophischen Auslegung des Gödelschen Satzes.) Nach Brouwer bedeutete die geistige Freiheit nicht nur, daß man nach Belieben Konstruktionen nach vorgegebenen Mustern ausführen kann, sondern daß man sogar noch die Muster selbst zum Gegenstand machen und unbegrenzt vermehren kann: Alle Definitionstypen und Beweismuster selbst können nie fertig präsentiert werden, das heißt die Menge der Konstruktionsregeln kann nicht abgeschlossen werden.
Brouwers Rede bestärkte Gödel darin, daß kein finites Sprach- und Beweissystem im Sinne Hilberts je ausreicht, um auch nur alle bloß arithmetischen Sachverhalte auszudrücken. Als Platonist glaubte Gödel an das fertige Vorhandensein von allen mathematischen Begriffen und Sachverhalten, egal ob der Geist sie konstruieren oder auch nur entdecken kann.

Cantors Diagonalverfahren

Im Falle der Zahlentheorie läßt sich sofort in diesem Sinne das berühmte Diagonalverfahren von Cantor anwenden. Cantor frappierte die mathematische Welt, als er zum ersten Mal 1885 sein Verfahren anwandte, um die Nichtabzählbarkeit der reellen Zahlen nachzuweisen, womit er gleichzeitig die Existenz einer größeren Unendlichkeit als die einfache Unendlichkeit der natürlichen Zahlenreihe nachwies: Es war die „Mächtigkeit des Kontinuums", das heißt die Anzahl der Punkte in jeder stetigen Kurve.
Ebenfalls kann man Cantors Diagonalverfahren anwenden, um die Überabzählbarkeit der zahlentheoretischen Sachverhalte nachzuweisen, was Gödel 1931 in einem Brief an Zermelo erwähnte.[13]
Daraus folgt aber auch schon sofort die Unvollständigkeit von Hilberts finiter Beweismethode (sowie natürlich auch der Frege/Russell-Sprachen, worauf sich Gödel dann auch im Titel seines berühmten Aufsatzes 1931 bezog); denn diese Methode deckt ja höchstens abzählbar unendlich viele Formeln beziehungsweise Sachverhalte ab. Gleichzeitig heißt dies, daß kein Wahrheitsbegriff für die Arithmetik innerhalb einer finiten Sprache definierbar ist – Gödels Vorrang auch bezüglich der Wahrheitsproblematik hat Alfred Tarski in seinem berühmten Aufsatz „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen" (deutsch 1936) gebührend anerkannt. Denn um einen Wahrheitsbegriff W in einer Sprache zu definieren, müssen alle Sachverhalte des Gebietes in der Sprache ausdrückbar sein, über das die Sätze der Sprache reden.
Man kann im Grunde in Cantors Diagonalverfahren den Kern des Gödelschen Beweises erblicken, da das Diagonalverfahren die Unvollständigkeit jedes finiten Sprachsystems nach sich zieht.

Tatsächlich hat schon 1926 der Mathematiker Paul Finsler, der bei Carathéodory und Hilbert studiert hat und selber ein Platonist wie Gödel war, in einem Aufsatz[14] genügend deutlich gemacht, wie das Diagonalverfahren, aber auch die verwandte Richardsche Paradoxie zur Widerlegung des Hilbertschen Programms angewandt werden kann.
Finsler hatte auch schon erkannt, daß die überzeugendste Widerlegung der Hilbertschen formalen Methode darin bestehen müßte, mit Hilfe dieser formalen Methode selbst einen Satz zu konstruieren, der nachweislich formal *unentscheidbar* ist auf Grund seiner Konstruktionsmerkmale. Finsler hat also die Frage nach der formalen Widerspruchsfreiheit im Sinne von Hilbert mit dem Problem der Entscheidbarkeit verknüpft. Er konstruierte einen Satz, der formal widerspruchsfrei, aber logisch falsch, beziehungsweise, obwohl falsch, formal unentscheidbar ist. Diese Vorgangsweise erscheint deswegen überzeugender als eine allgemeine Anwendung des Cantorschen Diagonalverfahrens, weil das letztere immer von der Existenz einer (fertig abgeschlossenen!) unendlichen Menge von Gegenständen in einer endlosen tabellarischen Anordnung ausgehen muß. Ein Konstruktivist oder Intuitionist wie Brouwer würde die Verwendung einer unendlichen Menge überhaupt als sinnlos ablehnen; während es auch im Hilbertschen Programm wesentlich zur Praxis seiner Methode gehört, Skepsis über die aktuale Existenz unendlicher Mengen walten zu lassen und noch weniger als die Intuitionisten in Beweisen irgendeinen Gebrauch davon zu machen.
Finslers Arbeit ermangelte aber einer formaltechnischen Darstellung und setzte sich nicht durch, weil er die formale Methode der Hilbertschen finiten Beweistheorie nicht beherrschte. Insbesondere erweist sich beim näheren Hinschauen, daß die unentscheidbare Formel, die er konstruierte, eigentlich gar nicht finit konstruiert wurde, weil ihre Kennzeichnung wesentlich Bezug nimmt auf eine unendliche Menge, nämlich auf eine ganze Antidiagonale. (Genaugenommen gehört Finslers „unentscheidbarer Satz", der dennoch „rein gedanklich" beweisbar ist, nicht zum untersuchten formalen System selbst, sondern zu dessen Metatheorie, wie man heute sagt.) Weil aber Finslers „unentscheidbarer Satz" nicht finit konstruiert wurde, verfehlte er sein Ziel, einen finiten Unvollständigkeitsbeweis zu bringen.
Hilbert und von Neumann wollten außerdem auch das Überabzählbarkeitsargument, nämlich daß die gesamten zahlentheoretischen Sachverhalte und Wahrheiten überabzählbar sind, während die in der von Hilbert forcierten Prädikatenlogik formulierbaren Sachverhalte und Wahrheiten jedoch nur abzählbar sind, nicht gelten lassen. Für sie war der in der Prädikatenlogik kodifizierbare und formalisier-

bare Teil der Arithmetik der beweisbare Kern. Und wenn man die inhaltliche Zahlentheorie mit der formalen vergleichen wolle (zum Beispiel der Peano-Arithmetik), so müsse man sich auf den nennbaren inhaltlichen Teil der Zahlentheorie beschränken, um diese beiden Ebenen (die inhaltliche und formale) adäquat miteinander vergleichen zu können. Die nennbare Zahlentheorie entspricht in etwa dem Teil, der von den Mathematikern konkret konstruiert werden kann. Gödel kannte diese Ansicht und vermied deshalb von Anfang an das Überabzählbarkeitsargument und jeden Hinweis auf das Cantorsche Diagonalverfahren. Dennoch spürte Gödel allzu deutlich: Ein Unvollständigkeitsbeweis lag in der Luft.

Gödels Entdeckung

Nachdem wir kurz die Konturen des intellektuellen Klimas innerhalb der logisch-mathematischen Grundlagenforschung im ersten Viertel des zwanzigsten Jahrhunderts skizziert haben, diesen Streit der Schulen, die vielen Teillösungen und unterschiedlichen Terminologien, kann man sich wohl vorstellen, wie lohnend der Gewinn einer Arbeit sein würde, die alle diese Probleme, die ja schon zum Teil oder informell gelöst waren, in einer von allen Schulen akzeptierten Terminologie und Beweismethode eindeutig klären würde.
Dies war es, was dem 25jährigen Gödel gelang. Er bewies in seiner Arbeit von 1931 „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", daß die Vollständigkeit und die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik mit finiten Mitteln unbeweisbar sind. Gödel traf das Hilbertsche Programm damit im innersten Kern, indem er nur die Annahmen *dieses Programms* selbst verwendete, um es zu widerlegen. Dabei folgte Gödel vorerst der Anregung Finslers (1926) und erstellte eine zweifelsfrei finitäre zahlentheoretische Aussage (die sogar auf einer höheren Stufe als wahr erkannt werden muß, obwohl dies nicht im Beweis verwendet wird), die aber formal weder beweisbar noch widerlegbar und damit unentscheidbar bezüglich der vorgegebenen finiten Beweismittel ist; womit die Zahlentheorie im Rahmen des Hilbertschen Programms unwiederbringlich unvollständig bleibt, was auch den Beweis ihrer Widerspruchsfreiheit verhindert. Die Unmöglichkeit des Widerspruchsfreiheitsbeweises ergibt sich eigentlich als Korollar und wird gewöhnlich „Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz" genannt.
Das Ergebnis war so eindeutig und verblüffend, daß sich daraus auch eine ganze Menge philosophischer Interpretationen betreffend die Natur des menschlichen Geistes, seine Überlegenheit über Maschinen und so weiter ableiten ließen, die zur Attraktivität von „Gödels

Beweis", wie er hinfort genannt wurde, erheblich beitrugen, obwohl „positive" Lösungen wie die Vollständigkeitstheoreme von Tarski (für reell abgeschlossene Körper, 1931) und von Gentzen (für die Arithmetik) für die Weiterentwicklung der Logik selbst mehr brachten, obwohl Gentzens Methode über rein finite Mittel hinausging. Klarerweise entzündet sich der philosophische Geist aber lieber an Theoremen, die theoretische Grenzen aufzeigen, so wie eben Gödels Theorem.
Gödels Arbeiten von 1930 und 1931 hatten auch viele rein technische Vorteile gegenüber seinen Vorläufern, was ebenfalls ihre Wirksamkeit und ihren Erfolg erklärt. Herbrand, Löwenheim und Skolem, die technischen Vorläufer von Gödels Vollständigkeitssatz für die Prädikatenlogik (1930), dessen Problem vom Hilbert-Schüler Ackermann (1928) präzis formuliert worden war, arbeiteten bloß beweistheoretisch und semantisch nur mit Wahrheitsfunktionen.
Zur Zeit Gödels hingegen war der Modellbegriff in Ausarbeitung, den unabhängig auch Alfred Tarski für seine berühmte Arbeit „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen" (1933 auf polnisch) und auch schon vorher in „Sur les ensembles définissables de nombres réels. I" (1931) benützt hat. In (1933) hat Tarski auch bereits eine Methode der metamathematischen Darstellung à la Gödel entwickelt. Direkt an Gödel (1931) knüpfte er an „bei der negativen Lösung des Problems der Definition der Wahrheit für den Fall, daß die Metasprache nicht reicher ist als die untersuchte Sprache".[15]
Gödel verwendete also als erster den *Modellbegriff* für seine Formulierung der Vollständigkeit in dem Sinne, daß, wenn ein Satz in allen Strukturen wahr ist, er auch (mit Hilfe der im formalen System vorgegebenen Beweisbeziehung) ableitbar sein muß. Des weiteren benützte er den Interpretationsbegriff und die logische Folgerung.
An dieser Stelle sei auch kurz auf Gödels weitere epochale Leistungen verwiesen, wie seine Beiträge für die Mengenlehre (relativer Konsistenzbeweis, Cantors Kontinuumsproblem), für die Rekursionstheorie, für die Kosmologie (eine neue Lösung der Einsteinschen Feldgleichung mit rotierenden Universen), über die Länge von Beweisen (1934/35), das intuitionistische Realisierungstheorem und seine zahlreichen fundamentalen philosophischen Abhandlungen.
Gödels große Errungenschaft, die seine Zeitgenossen so frappierte und die „weit durch den Raum und die Zeit hindurch ein Markstein bleiben wird" (Johann von Neumann), ist aber sein Unvollständigkeitsbeweis, den er im Sommer 1930 geführt und im Herbst desselben Jahres ausgerechnet Johann von Neumann in Königsberg vorgeführt hat, der selbst sechs Jahre lang an Hilberts Seite gekämpft und die Widerspruchsfreiheit eines bedeutenden Teilsystems der Zahlentheorie bewiesen hat (1927). Gödel zeigte als erster in der Geschichte der Mathematik (wieder in den Worten von Neumanns),

daß gewisse mathematische Theoreme mit den akzeptierten exakten Methoden der Mathematik weder bewiesen noch widerlegt werden können. Mit anderen Worten hat er das Vorhandensein von unentscheidbaren mathematischen Sätzen bewiesen. Er bewies weiters, daß ein sehr wichtiger spezifischer Satz dieser Klasse von unentscheidbaren Problemen angehörte: die Frage, ob Mathematik von inneren Widersprüchen frei ist. Das Resultat ist in seiner quasi-paradoxen „Selbstverneinung" bemerkenswert: Es wird nie mit mathematischen Mitteln möglich sein, die Gewißheit zu erlangen, daß Mathematik nicht Widersprüche enthält. Es muß der wichtige Punkt betont werden, daß dies kein philosophisches Prinzip oder eine einleuchtende intellektuelle Einstellung, sondern das Resultat eines strengen mathematischen Beweises von besonders raffinierter Art ist.[16]

Modifizierung des Lügners

Es war Gödels Leistung, mit äußerster Präzision eine wirklich rein finit konstruierte Formel angegeben zu haben, die nachweislich unentscheidbar ist, und dadurch das formale Sprachsystem, in dem sie konstruiert wurde, unvollständig zu machen. Gödels Grundgedanke war genial einfach: Die zu konstruierende, unentscheidbare Formel soll sagen: „Ich bin unbeweisbar."

Dabei adaptierte Gödel eine der ältesten Antinomien überhaupt, die des paradoxen „Lügners", die Epimenides dem Kreter zugeschrieben wird. Epimenides soll einmal gesagt haben: „Alle Kreter lügen unentwegt", welcher Satz anscheinend weder wahr noch falsch sein kann, wenn man bedenkt, daß Epimenides ein Kreter war und daß die unbeschränkte Aussage auch ihn treffen müßte. Also muß auch er gelogen haben, weil er selbst als Lügner eingeschlossen ist. Wenn Epimenides die Wahrheit aussagte, können nicht alle Kreter unentwegt gelogen haben, denn einer davon, Epimenides, hatte gerade nicht gelogen. Also muß Epimenides' Aussage als falsch gelten, weil sie hier eine Ausnahme gefunden hatte. Das ist zunächst noch kein Widerspruch, wohl aber ein paradoxer Sachverhalt. Der wird jedoch zur exakten Kontradiktion eo ipso, wenn wir anders formulieren: „Dieser Satz, den ich gerade spreche, ist falsch."

Gödel ersetzte darin Falschheit durch die Unbeweisbarkeit und bemerkte dann, daß diese naheliegende Formulierung „Dieser Satz ist unbeweisbar" *gar nicht mehr antinomial* ist, und er schickte sich an, dies (mit finiten Beweismitteln!) zu zeigen. (Die Ersetzung von Wahrheit durch Beweisbarkeit ist und war sehr gängig, besonders bei Intuitionisten wie Brouwer, weil man gerne den abstrakten, logischen Wahrheitsbegriff mit dem menschennäheren erkenntnistheoretischen Begriff der Beweisfindung ersetzen wollte, wobei man häufig gleich draufkommt, diejenigen Wahrheiten als sinnlos auszuschalten, die nicht durch finite Beweismethoden bewiesen werden können.)

Gödels Problem war nun zweierlei: *Erstens* mußte er den Selbstbezug, der in den Worten „dieser Satz" angedeutet wird, einwandfrei in einem formalen System im Sinne von Frege, Russell und Hilbert darstellen. In der Zahlentheorie spricht man nur über Zahlen und Funktionen derselben, jedoch nicht über Formeln. Daher muß erst eine Zuordnung von Zahlen zu Formeln und Folgen derselben festgelegt werden. Sodann mußte er *zweitens* den Beweisbarkeitsbegriff selbst so genau präzisieren, daß er als exakter Gegenstand des formalen Systems behandelt werden kann. Die Beweisbarkeit (als Satzbeziehung über die Sätze des Systems) kann dann auf Zahlen abgebildet werden und ergibt dadurch selbst wiederum einen zahlentheoretischen Satz.

In den weiteren Ausführungen seines Aufsatzes von 1931 („Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I". *Monatshefte für Math. u. Phys.* 38 [1931], S. 173–198) verwendete Gödel keine mathematisch besonders schwierigen Gedankengänge der Zahlentheorie. Er zeigte seine Meisterschaft vielmehr in dem sprachlich-begrifflichen Aufbau der Beweiskonstruktion, vor allem in der Sicherheit seiner Behandlung der „Doppelbödigkeit" der Simultanschaltung von Begriffen auf der Objektebene (innerhalb des Systems) wie auf der Metaebene.

Gödelisierung

Dabei beeindruckte am stärksten Gödels zahlenmäßige Darstellungsmethode von Sätzen und Beweisen, die ihm zu Ehren seither „Gödelisierung" genannt wird. Gödels Unentscheidbarkeitsformel von 1931 bezieht sich auf sich selbst, ist selbstreferentiell und selbstabbildend. Die Arithmetik bildet sich auf sich selbst ab (das heißt arithmetische Sachverhalte – Sätze und Beweise – auf arithmetische Gegenstände – Zahlen und Zahlfunktionen). Das ist die Idee der Gödelisierung, und die erwies sich als geschichtsmächtig. Die Gödelisierung geht so vor sich, daß jedem Ausdruck eines formalen Systems eine Zahl zugeordnet wird, und zwar so, daß man die Zuordnung auch umkehrt, indem man für jede Zahl berechnen kann, ob sie einer und wenn schon, welcher Formel sie entspricht. Die Zuordnung kann auch so geschaffen werden, daß bestimmte Zahlen für die Klasse der Beweisfolgen von Sätzen reserviert werden.

Bei der eindeutigen Zuordnung von Ausdrücken und Zahlen kamen Gödel nun die Vorlesungen über Zahlentheorie seines Lehrers Philipp Furtwängler zugute. Es ist ja bekannt, daß Zahlen eindeutig in Primzahlfaktoren zerlegt werden können, und diese Tatsache verwendete Gödel folgendermaßen: Ein komplexer formaler Ausdruck besteht aus einer Folge von Zeichen, denen gewisse Zahlen eindeutig zugeordnet sind. Diese werden als Exponenten den Primzahlen (der aufsteigenden Primzahlenreihe) angefügt, und die sich daraus ergebenden Primzahlenpotenzen werden miteinander multipliziert. Dadurch ist auch dem komplexen Ausdruck eindeutig eine Zahl zugeordnet. Dieses Verfahren kann an einem einfachen Beispiel verdeutlicht werden. Man nehme an, dem Individuumsnamen a wird die Zahl 3 zugeordnet, und das Prädikat P (etwa „sterblich") bekommt die Zahl 5. Dann bekommt der Satz Pa („Der Mensch a ist sterblich") die Gödelnummer $2^3 \cdot 3^5 = 32.768$. Diese Zuordnung ist nun eindeutig und erfüllt daher die vorgegebene Auflage, weil die Zahl 32.768 nur wieder in die Primzahlfaktoren 2^3 und 3^5 zerlegt werden kann und keinem anderen Ausdruck als Pa entsprechen kann.

Ganz originell war die Gödelisierung allerdings nicht, denn sie ist in einer verwandten Form schon von Leibniz[17] erfunden worden, der zeitlebens logische Ableitung mit Hilfe von Zahlenfunktionen algorithmisch berechnen wollte und in seiner späteren Zeit auf die eindeutige Primzahlzerlegung von „charakteristischen Zahlen" gestoßen ist. Gödel war schon früh ein Verehrer von Leibniz gewesen, den er über alle Denker der Geschichte schätzte, und es ist anzunehmen, daß er von Leibniz zu seiner „Gödelisierungsmethode" angeregt wurde.

Mit seinen Primzahlzuordnungen schaffte Gödel den Durchbruch, denn er hatte damit einen Code gefunden, der es erlaubte, insbesondere auch Beweisbeziehungen zwischen den Sätzen eines Systems innerhalb des Systems (durch einen zahlentheoretischen Satz im System) repräsentieren zu können. Erst dieser Trick erlaubt es, den Selbstbezug in dem Satz „Dieser Satz ist unbeweisbar" auch formal korrekt ausdrücken zu können. Dabei zeigte sich natürlich, daß dies nur möglich ist, wenn das formale System reichhaltig genug ist, denn die Möglichkeiten der Kodifizierung müssen gegeben sein. Im wesentlichen erfordert eine geeignete Kodifizierung schon die Reichhaltigkeit des natürlichen Zahlensystems.

Gödelisierte Beweisbarkeit

Mit der Gödelisierung hat man also eine Äquivalenz zwischen zwei Arten von Aussagen gefunden, insbesondere folgende: Jeder Behauptung in der Metasprache, daß $\overline{B}$ ein Beweis von A ist, entspricht eine Zahlenaussage C in der Objektsprache (der auch A angehört), so daß C besagt: „Es existiert eine Zahl b, die die Gödelnummer einer Formelfolge ist, die ein Beweis $\overline{B}$ von A ist." Dabei wird C, als Zahlenaussage, natürlich nicht die Formel A und Formelfolge $\overline{B}$ erwähnen,

sondern deren zugeordnete Gödelzahlen, etwa a und b. Symbolisch hat man also $\overset{\overline{B}}{\vdash} A \Leftrightarrow \text{Bew}(b, a)$ (dabei bedeuten „$\Leftrightarrow$" die logische Äquivalenzbeziehung [:genau dann, wenn ...] und „$\vdash$" die metatheoretische Beweisbeziehung eines Satzes [formale Ableitbarkeit aus den Axiomen]). $\overset{\overline{B}}{\vdash} A$ bezeichnet die Deduktion der Formel A durch den Beweis $\overline{B}$ (=nach festgesetzten Regeln aufgebaute Formelfolge). $\boxed{\text{Bew (b, a)}}$ bedeutet: b ist die Gödelzahl einer Formelfolge, die ein Beweis der Formel mit der Gödelzahl a ist. „Bew" ist also ein zahlentheoretisches Verhältnis zwischen Zahlen (natürlich zwischen Gödelzahlen). Dabei darf man nie vergessen, um manchmal auch in der Fachliteratur vorkommenden Mißverständnissen vorzubeugen, daß „Bew (b, a)" keineswegs etwa bedeutungsgleich (im Fachjargon: intensional äquivalent) mit „$\overset{\overline{B}}{\vdash} A$" ist. Denn „Bew (b, a)" redet über Zahlen, während „$\overset{\overline{B}}{\vdash} A$" über Zahl*aussagen* redet, also haben die zwei Sätze ganz verschiedene Gegenstände zum Inhalt. Die obige Äquivalenz heißt bloß, daß die Zahlenaussage „Bew (b, a)" immer und nur dann wahr ist (und zwar wegen der Kodierungsdefinition von „Bew"), wenn „$\overset{\overline{B}}{\vdash} A$" der Fall ist.

Nun wollte Gödel den Sachverhalt „Dieser Satz ist unbeweisbar" formalisieren. Dies zu tun erfordert allerdings einigen Aufwand, denn es muß vor allem erst gezeigt werden, daß überhaupt sämtliche (finiten) Beweisfiguren über Zahlenformeln erfolgreich in die Kodifizierung durch Gödelzahlen eingehen. Denn erst nachdem sichersteht, daß auch alle Beweise bestimmten Zahlen entsprechen, kann man in der Zahlenkodifizierung den Tatbestand repräsentieren, daß eine Formel *keinen* Beweis hat. Es könnte ja sein, daß die Kodifizierung bestimmte Beweisfiguren nicht erfaßt hätte. Aus der Tatsache, daß keine Gödelzahl eines Beweises existiert, ließe sich dann nicht mehr darauf schließen, daß auch kein Beweis da ist, was man ja zeigen will.

In diesem zentralen Teil seines Unvollständigkeitsbeweises hatte Gödel eigentlich seine größte Leistung erbracht, denn er explizierte zum ersten Mal exakt das ganze Hilbertsche Programm. (Allerdings ließ Gödel offen, ob seine Explikation der finiten Beweismethoden Hilberts Intentionen genau entsprach, und betonte daher, daß sein Beweis nicht als eine [unüberwindbare] Widerlegung des Hilbertschen Programms gelten solle. Dennoch wird Gödels Beweis – unseres Erachtens richtigerweise – als eine solche Widerlegung gehandelt, und zwar, weil Hilbert den Begriff des Finitären von Anfang an möglichst *eng* faßte, während eine „Rettung" des Programms, etwa von Gentzen [1936], dessen *Erweiterung* erfordert.)

Dies mußte er tun, wie aus den obigen Überlegungen unmittelbar hervorgeht, weil er eine genaue Handhabe über alle möglichen (finiten)

Beweisfiguren haben mußte. Dabei zeigte Gödel im wesentlichen, daß alles, was in einem formalen System „effektiv“ entschieden werden kann, in dem kodifizierten Gegenstück primitiv-rekursiven Zahlverhältnissen entspricht. In diesem Sinne ist also der logische Begriff der Entscheidbarkeit äquivalent dem arithmetischen Begriff der primitiv-rekursiven Berechenbarkeit. Dieser Nachweis Gödels kann auch als eine Krönung von Leibnizens lebenslanger Bemühung angesehen werden, welche die Logik mit der Zahlentheorie verbinden wollte. Daß Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit miteinander so in Verbindung stehen, war natürlich von vornherein eine implizite Voraussetzung des Hilbertschen Programms, weil dieses ja die Zeichenkombinatorik (worunter auch Beweisführung subsumiert wurde) als quasi dasselbe wie die Zahlenrechnung auffaßte. Dennoch hat dies erst Gödel wirklich gezeigt.

Arithmetische Selbstreferenz

Nach dem Nachweis der rekursiven Berechenbarkeit von Bew blieb jetzt nur mehr der große Trick übrig, wie man die Selbstbezogenheit der Worte „Dieser Satz ist unbeweisbar“ repräsentieren soll.
Hat man einmal Bew (b, a), wie bereits beschrieben, als Satz über verschiedene Zahlen derart konstruiert, daß er mit der Bedeutung $\overset{\overline{B}}{\vdash} A$ korreliert, das heißt wahrheitswertmäßig äquivalent ist, setzen wir weiter fest:
„Nicht es gibt (mindestens) ein b, so daß Bew (b, a) gilt.“ Als Formel: $\neg\exists b$: Bew (b, a).
Dieser Satz bedeutet: Es gibt keine Gödelzahl (zum Beispiel b), die ein Beweis der arithmetischen Aussage mit der Gödelzahl a ist. Bezeichnen wir diese Aussage (mit der Gödelzahl a) als A, so ist das der *meta*mathematische Sachverhalt: $\nexists$ Beweis $\overline{B}$: $\overset{\overline{B}}{\vdash} A$ oder kurz $\nvdash A$, also „A ist nicht beweisbar“. Nun müssen wir noch den Übergang von „A ist unbeweisbar“ zu „Dieser Satz ist unbeweisbar“ schaffen. Arithmetische Sätze sprechen über Zahlen (Gleichheit, Ungleichheit, Existenz, Addition, Multiplikation ... und so weiter) und nicht über Aussagen, daher verwenden wir die *Gödelzahlen* von Aussagen (und den darin enthaltenen Symbolen wie Gleichheit ... und so weiter). Wie repräsentieren wir jedoch die *Rückbezogenheit* „Dieser Satz ...“? Indem wir durch einen komplizierten Trick dafür sorgen, daß die Zahlenkonstruktion „Der Satz mit der Gödelzahl n ist nicht beweisbar“ eben genau die Gödelzahl n hat. Diesem Trick entspricht in der natürlichen Umgangssprache das Zitieren unter Anführungszeichen, auch als Quotieren bezeichnet. (Hofstadter nennt es Quinieren in An-

lehnung an den berühmten amerikanischen Philosophen Willard Van Orman Quine.) Dem Quotieren entspricht in der Arithmetik die Substitution: $\boxed{\text{Sub (a, n, c)}}$ läßt sich genauso wie Bew (a, b) als primitiv-rekursives Prädikat definieren, wenn es so konstruiert wird, daß es die Bedeutung hat: Wird in der Formel mit der Gödelzahl a die einzige freie Variable (zum Beispiel x) durch die Zahl n ersetzt, so erhält man eine Formel mit der Gödelzahl c. (Diese Substitutionseigenschaft ist, genauso wie die Beweiseigenschaft, nicht nur primitiv-rekursiv, sondern sogar entscheidbar!)

Die Substitution

Bezeichnen wir wieder wie vorhin die Formel mit der Gödelzahl a als A und nehmen an, daß sie eine einzige freie Variable, nämlich x, enthält, so symbolisieren wir das als A (x). Ersetzen wir die Variable x in A durch n Striche, die wir mit $\overline{n}$ andeuten (was die formale Repräsentation der Zahl n in der formalen Arithmetik ist), so symbolisieren wir das Ersetzungsergebnis als A (x/$\overline{n}$). Mit dieser Symbolik bekommen wir nun folgende logische Äquivalenz:

$$\text{Sub (a, n, c)} \Leftrightarrow A\,(x/\overline{n}) \equiv C.$$

(Dabei sei C die Formel mit der Gödelzahl c.)
Wir erinnern uns an die bereits erklärte Entsprechung:

$$\text{Bew (b, a)} \Leftrightarrow \overset{\overline{B}}{\vdash} A$$

Betrachten wir nun das Satzfragment: „... Quotiert und vorangestellt ergibt dies eine infame Lüge.“
Die drei Punkte bezeichnen eine Leerstelle, eine Art Platzhalter, in welche die Quotierung obigen Fragments eingesetzt werden soll. Das ergibt: „Quotiert und vorangestellt ergibt dies eine infame Lüge“ quotiert und vorangestellt ergibt dies eine infame Lüge.
Man sieht schon fast, daß dies eine Umformung der Antinomie des Lügners ist. Denn wäre der quotiert-vorangestellte Ausdruck eine infame Lüge, dann müßte es auch eine infame Lüge sein, daß er eine infame Lüge ist. Er wäre also wahr.
Dem obigen Quotieren, also dem Einsetzen des unter Anführungszeichen gesetzten eigenen Satzes in die Leerstelle, entspricht das Einsetzen der Gödelzahl des *eigenen Satzes* in die (einzige) freie Variable: Sub (a, a, c). Das heißt, aus A konstruiere ich A (x/$\overline{a}$), wobei a die Gödelzahl von A ist und $\overline{a}$ a-viele Striche bedeutet. Wenn ich nun zusätzlich fordere, daß A (x/$\overline{a}$), das ja die Gödelzahl c hat, nicht beweisbar ist, bin ich fast fertig:

$$\neg\exists b, \exists c: \text{Sub (a, a, c) \& Bew (b, c)}.$$

Man kann das noch anders formulieren, was vielleicht klarer ist: An Stelle des Prädikates Sub (a, a, c) kann man gleichwertig c=

sub (a, a) schreiben, wobei das kleingeschriebene sub nun eine *Funktion* ist[17a] und einen Zahlenwert als Ergebnis liefert, nämlich c, die Gödelzahl von A (x/ā). Dann kann man obigen Sachverhalt vereinfacht schreiben:

$$\neg \exists b\colon \mathrm{Bew}\,(b, \mathrm{sub}\,[a, a]).$$

Das bedeutet: Der Satz, der dadurch entsteht, daß in der Satzform mit der Gödelzahl a, deren einzige freie Variable (zum Beispiel x) durch ihre eigene Gödelzahl (nämlich a, beziehungsweise genau durch a-viele Striche) ersetzt wird, ist nicht beweisbar.

Der Gödelsche Beweis

Dieser obige Satz, den wir F(a) nennen wollen, hat eine freie Variable, nämlich a, weshalb er eigentlich nur eine Satzform darstellt. (Eine zahlentheoretische Formel mit einer freien Variablen, zum Beispiel „x ist durch 2 teilbar", bildet ja noch keine Aussage und ist weder wahr noch falsch, solange der Wert von x nicht festgelegt ist.) Wir müssen diese Satzform daher in einen geschlossenen Satz verwandeln, und einen solchen erhalten wir beispielsweise, wenn wir eine konkrete Zahl (beziehungsweise eine Strichfigur) für seine einzige freie Variable a einsetzen. Die Satzform F(a) hat natürlich auch eine Gödelzahl, zum Beispiel f:

$$\boxed{\begin{array}{l} F(a) \hat{=} \underbrace{\neg \exists b\colon \mathrm{Bew}\,(b, \mathrm{sub}\,[a, a])} \\ f \;=\; \mathrm{Göz}\,[F(a)] \end{array}}$$

Setzen wir diese Gödelzahl f in der Satzform F(a) für die freie Variable a ein, so erhalten wir den Satz F(f). Er besitzt, wie wir gleich sehen werden, die Gödelzahl sub (f, f):

$$\boxed{\begin{array}{l} F(f) \hat{=} \neg \exists b\colon \mathrm{Bew}\,(b, \mathrm{sub}\,[f, f]) \\ \mathrm{Göz}\,[F(f)] \;\hat{=}\; \mathrm{sub}\,(f, f) \end{array}}$$

Denn sub (f, f) ist ja nach obiger Definition die Gödelzahl jenes Satzes, den man erhält, wenn man in der Satzform mit der Gödelzahl f (also F) für ihre einzige freie Variable (in unserem Fall a) die Gödelzahl f (beziehungsweise f-viele Striche) einsetzt. Und was ist das Ergebnis dieser Einsetzung von f in F(a)? Natürlich der Satz ¬∃ b: Bew (b, sub [f, f]). Er besagt schlicht und einfach: Der Satz mit der Gödelzahl sub (f, f) ist unbeweisbar. Und außerdem hat er auch die Gödelzahl sub (f, f), wie wir bereits wissen (denn die Konstruktionsvorschrift von sub [f, f] ergibt ja gerade ihn!). Formal schaut das so aus (was wir

durch Umformen und Zusammenziehen der beiden Gleichungen in der letzten Einrahmung erhalten):

$$\neg \exists b\colon \mathrm{Bew}\,(b, \mathrm{sub}\,[f, f]) \hat{=} \mathrm{Göz}^{-1}\,[\mathrm{sub}\,(f, f)],$$

wobei die inverse Funktion $\mathrm{Göz}^{-1}$ [n] den Satz mit der Gödelzahl n bezeichnet. Graphisch läßt sich das etwa folgendermaßen darstellen:

$$\boxed{\begin{array}{c} = \\ \neg \exists b\colon \mathrm{Bew}\,(b, \overbrace{\mathrm{sub}\,[f, f]}) \\ \underbrace{\hphantom{\neg \exists b\colon \mathrm{Bew}\,(b, \mathrm{sub}\,[f, f])}} \\ \mathrm{Göz}\,[\quad] = \end{array}}$$

Durch Einsetzung von Göz [ ] an Stelle von sub [f, f] erhält man unmittelbar:

$$\boxed{\begin{array}{l} \neg \exists b\colon \mathrm{Bew}\,(b, \mathrm{sub}\,[f, f]) \hat{=} \\ \hat{=} \neg \exists b\colon \mathrm{Bew}\,(b, \mathrm{Göz}\,[\neg \exists b\colon \mathrm{Bew}\,(b, \mathrm{sub}\,[f, f])]) \end{array}}$$

Der untere Ausdruck ist dabei keine arithmetische Formel: Göz [ ] ist ja eine metasprachliche Funktion. Daher ist er nur suggestiv gemeint, und seine Interpretation lautet eben: Die Formel ¬∃ b: Bew (b, sub [f, f]) ist unbeweisbar. Wir erhalten also:

$$\boxed{\begin{array}{l} \neg \exists b\colon \mathrm{Bew}\,(b, \mathrm{sub}\,[f, f]) \hat{=} \\ \hat{=} \neg \exists b\colon \mathrm{Bew}\,(b, \mathrm{sub}\,[f, f]) \text{ ist unbeweisbar.} \end{array}}$$

Was soll das auf gut Deutsch heißen? Eine klare Antwort liegt hier vor: Der Satz ¬∃ b: Bew (b, sub [f, f]) bedeutet – Sie haben es längst erkannt – seine eigene Unbeweisbarkeit. Er ist die arithmetische Formulierung für „Dieser Satz selbst ist unbeweisbar". Und zwar formal unbeweisbar in einem beliebig gewählten, für unsere Betrachtungen aber ein für allemal festgehaltenen Axiomensystem der Arithmetik. (Üblicherweise wählt man die Peano-Arithmetik dafür.) Deshalb wird in Fachkreisen auch oft von Ableitbarkeit (Deduktion) an Stelle von (formaler) Beweisbarkeit gesprochen, um Verwechslungen mit dem inhaltlichen Beweisen zu vermeiden. Denn beweisbar ist der Satz ¬∃ b: Bew (b, sub [f, f]) sehr wohl, was wir im folgenden Absatz gleich zeigen werden, jedoch mit inhaltlichen Überlegungen. Derart kann die Gültigkeit des Satzes noch immer gezeigt werden, denn unseren inhaltlichen Schlußweisen sind ja keine Grenzen auferlegt.

Die Unvollständigkeit der Arithmetik

Bisher wurde ausführlich diskutiert, in welchem Sinne die Gödel-Formel ihre eigene Unbeweisbarkeit aussagt. Nun fehlt jedoch noch das Argument, warum sie die Unvollständigkeit der Arithmetik bewirkt.

Dazu müssen wir sie auf ihren Wahrheitsgehalt prüfen. Zu diesem Zweck wollen wir im folgenden den Gödel-Satz G nennen und nochmals seine formale Bedeutung in etwas verkürzter Schreibweise festhalten:

$$\boxed{\begin{array}{r} G \equiv \nexists \text{ Bew sub } (f, f), \text{ wobei} \\ \text{sub } (f, f) = \text{Göz } [\nexists \text{ Bew sub } (f, f)] \text{ ist.} \end{array}}$$

Wir wollen nun zeigen, daß G wahr ist, und zeigen dies indirekt: Wir nehmen an, G sei falsch, und folgern daraus einen Widerspruch. Also angenommen, G sei falsch, dann ist seine Negation $\neg G$ wahr. Gemäß obiger Festsetzung gilt:

$$\neg G \Leftrightarrow \exists \text{ Bew sub}(f, f),$$
$$\text{wobei sub}(f, f) = \text{Gödelzahl von } G.$$

Das heißt, G ist dann beweisbar. Nun gilt für alle wichtigen formalen Deduktionssysteme K wie die Prädikatenlogik und auch die (formale) Peano-Arithmetik, daß sie *korrekt* sind, das heißt, wenn eine Formel A ableitbar ist, muß sie auch wahr sein:

$$\text{Korrekt } K := \vdash_K A \Rightarrow \text{wahr } A \text{ für } \forall \text{ Formeln } A.$$

Wegen der Korrektheit der Peano-Arithmetik muß dann G (zusätzlich zur Beweisbarkeit) auch wahr sein.
Das ist aber ein Widerspruch zu obiger Voraussetzung, daß G falsch sein soll.
Aus diesem Widerspruch folgt, daß G wahr sein muß. Wenn G aber wahr ist, ist es auch unbeweisbar, da es ja seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet. Diesen Sachverhalt nannten wir aber gerade Unvollständigkeit. Denn Vollständigkeit eines Systems K bedeutet ja die Umkehrung der Korrektheit, also: Wenn eine Formel A wahr ist, muß sie auch ableitbar sein:

$$\text{Vollst. } K := \text{wahr } A \Rightarrow \vdash_K A \text{ für } \forall \text{ Formeln } A.$$

Also: Alle wahren Formeln müssen auch ableitbar sein. Für G gilt das jedoch *nicht*, wie wir soeben gezeigt haben. Daher ist die formale Peano-Arithmetik unvollständig. Darüber hinaus gibt es für jedes beliebige Axiomensystem, das die Arithmetik enthält, immer wahre arithmetische Sachverhalte, die man mit Hilfe der dem Mathematiker innewohnenden Intuition inhaltlich als wahr erschließen kann, aber nicht aus dem vorgegebenen formalen System (gleichsam maschinell bewiesen) ableiten kann.[17b] (Für ein detailliertes Studium des Gödelschen Beweises seien Interessenten auf das bekannte Buch *Der Gödelsche Beweis* von Ernest Nagel und James Newman [Oldenburg Verlag, Wien 1964] hingewiesen.)

Die Folgen des Gödel-Satzes

Gödel betonte in seinem Brief an Zermelo, daß an seinem Beweis wesentlich und zentral der Nachweis war, daß jedes für die Darstellung der Zahlentheorie verwendbare formale Sprachsystem L eine Grauzone von wohlgeformten, sinnvollen (im Falle von G sogar wahren!) Sätzen hat, die aber notwendigerweise wegen ihrer Struktur mit den Mitteln von L unentscheidbar bleiben. Und es nützt nichts, G als Axiom in L aufzunehmen, um Entscheidbarkeit wiederherzustellen; denn man erhält dabei ein neues System L', für welches ein neuer Gödelsatz G' entsteht, und so weiter ad infinitum.
Viele Mathematiker empfinden, obwohl sie die Korrektheit von Gödels Beweis nicht anzweifeln, dennoch eine gewisse Unzufriedenheit wegen der Natur des Gödelschen Satzes G, und zwar weil er auf eine Weise definiert wurde, die der Zahlentheorie fremd und gekünstelt vorkommt; denn vor der Ankunft von Computern mit gespeicherten Programmen waren syntaxbezogene Zahlenbeziehungen wie Bew und Sub unerhört. Noch weit mehr hätte es die Mathematiker nämlich frappiert, wenn beispielsweise die seit Jahrhunderten ungelöste Goldbachsche Vermutung, nämlich daß jede gerade Zahl als Summe von zwei Primzahlen darstellbar ist, sich als unentscheidbar nachweisen ließe. (Gödel meinte übrigens selber, daß die Goldbachsche Vermutung durchaus – finit – unentscheidbar sein könnte.)
Zunächst kann aber wie folgt beantwortet werden: Obwohl G sehr wohl auf eine neue Weise aufgebaut wurde, ist es heute keine Frage mehr, wie ungewöhnlich oder gekünstelt er „sub specie aeternitatis" ist. Denn seit der Erfindung des Programmierens von Computern durch von Neumann, der dabei auch von Gödel beeinflußt wurde, ist es ein Gemeinplatz geworden, zahlentheoretische und sprachlogische Sachverhalte miteinander in Programmbefehlen zu verzahnen. Darüber hinaus hat Gödel in seinem ursprünglichen Aufsatz 1931 schon darauf hingewiesen, daß jede „erkenntnistheoretische Antinomie", geeignet abgewandelt, für die Formel G Verwendung finden könnte; aber es ist bekannt, daß unendlich viele solche Antinomien erzeugt werden können (zum Beispiel: „A sagt, B hat recht; B sagt, C hat recht...; Y sagt, Z hat recht; Z sagt, A lügt"; und so weiter). Solche und verwandte Schleifenbildungen kommen in Programmschritten recht häufig vor, also sind Sätze wie G heutzutage gar nicht ungewöhnlich.
Doch können (finit) unentscheidbare Sätze auch aus dem traditionellen Bereich der zahlentheoretischen Probleme gefunden werden, ähnlich wie die Goldbachsche Vermutung, und zwar im Bereich der sogenannten „Ramsey theory", die zur Kombinatorik gehört, wobei man das Problem hat, die sehr schnell wachsende Zahl von Kombi-

nationen beziehungsweise Anordnungen von Gegenständen aus einer wachsenden Reihe von Mengen zu berechnen und zu charakterisieren. Zum Beispiel, zu einer vorgegebenen Zahl n die kleinste Menge von Personen zu berechnen, von der sich entweder mindestens n Personen paarweise einander kennen oder sich mindestens n Personen paarweise nicht kennen. Diese Menge wächst so schnell, daß das Wachstum einer Verallgemeinerung davon nicht rekursiv definiert werden kann, das heißt wächst in einer uns bisher unbekannten Weise.[18]
Sofort nach der Veröffentlichung von Gödels Unvollständigkeitsbeweis 1931 ergab sich eine Änderung im Bereich der Logik- und Grundlagenforschung der Mathematik. Hilbert sah enttäuscht ein, daß ein Kernpunkt seines Programms aufgegeben werden mußte: daß die Beweistheorie, die in der metamathematischen Grundlagenforschung verwendet wird, schwächer oder zumindest nicht stärker als die zu begründende Theorie sein sollte; insbesondere hat Hilbert, kurz nach Gödels mündlicher Übermittlung seines Beweises an Johann von Neumann (mit dem Hilbert persönlich eng zusammenarbeitete), angefangen, Beweisregeln zu erörtern, die stärker als vollständige Induktion waren. Carnap in Wien, mit dem Gödel ständig betreffend Grundlagenfragen in Kontakt war, ließ ein großes Manuskript ungefertigt und fing praktisch ganz von neuem an, wobei er durchwegs von Gödels neuen Methoden Gebrauch machte, vor allem von der Trennung zwischen Objekt und Metasprachen; das Resultat war die berühmte *Logische Syntax der Sprache* (1934). Die große polnische Logiker-Schule um Lukasiewicz und Leśniewski in Warschau hat sich wesentlich neu orientiert auf metamathematische Studien, die unter anderem Tarski und Mostowski weiterführten. Die amerikanische Schule um Church in Princeton (einschließlich Rosser und Kleene, die neben Bernays am meisten zur Anwendung und Vertiefung von Gödels Unvollständigkeitsbeweis leisteten) ist unmittelbar und sofort auf Gödels „Richtung" eingeschwenkt, zumal Gödel schon 1934 an Ort und Stelle in Princeton seine Ergebnisse vorgetragen hat – von dieser Entwicklung war auch Emil Post in New York mitbegriffen, der in der Isolation manche Ideen und Methoden Gödels vorweggenommen hatte. In England, wo Ramsey tragischerweise 1930 mit sechsundzwanzig Jahren starb, trat der geniale Alan M. Turing[19] hervor, der den Frege/Hilbert/Gödel-Begriff des formalen Systems in die allgemeinste und bestechendste Form eines Automaten, „Turing-Maschine" genannt, gebracht hat. Nur die Intuitionisten (Brouwer, Heyting), Phänomenologen (Husserl, Becker, Kaufmann) und Ultrafinisten (Wittgenstein und seine Schule) blieben desinteressiert an Gödel, weil für sie Vollständigkeit nichts Beweisfähiges beziehungsweise -würdiges blieb; aber die letztgenannten Schulen

machen damit die sicher falsche Annahme, daß die menschliche Intuition niemals fehlgeht.

Mechanismus, Mentalismus und Metamathematik

In den letzten Jahrzehnten hat Gödels Beweis einmal mehr ein zentrales und vielleicht spektakuläres Interesse gewonnen, und zwar insbesondere in der von der Theorie der künstlichen Intelligenz entfachten Diskussion, ob der menschliche Geist maschinell erklärt oder gar simuliert werden kann. Aus Gödels Unvollständigkeitstheorem wurde nämlich zunächst der Schluß gezogen, daß der Geist keine (Turing-)Maschine sei, weil der Mensch die Wahrheit eines Satzes und gar unbegrenzt vieler verwandter Sätze einsehen und entscheiden kann, dessen Wahrheit von einer Maschine wie einer Turing-Maschine (als „Verkörperung" eines formalen Systems) nicht entschieden werden könne. Dabei wird zum einen angenommen, jede Maschine ist digital (besitzt endlich viele Zustände und bewegt sich in diskreten Schritten), während zum anderen der Geist irgendwie ein unendliches Gebiet (Zahlentheorie) überschauen kann.
J. R. Lucas hat in seinem Aufsatz „Mind, Machines and Gödel" (1961) die Diskussion eröffnet. Er erblickte in Gödels Satz von 1931 den Beweis, daß der Geist nicht als Maschine erklärt werden könne. Gödel selbst favorisierte eine berühmte Alternative: Entweder ist der Geist nicht mechanisch, oder die Mathematik, eigentlich Arithmetik, ist nicht unsere eigene Konstruktion. Gödel neigte als Platonist dazu, den nichtmechanistischen Charakter des menschlichen Geistes, ja sogar nichtmechanische Naturgesetze anzunehmen.
In der Automatentheorie wiederholte sich die Problemdiskussion der logischen Grundlagenforschung unter der Perspektive der mechanistischen Natur des menschlichen Geistes. Die Unentscheidbarkeit eines mathematischen Satzes eines Systems mit den Mitteln des Systems galt als Beweis, daß man prinzipiell keinen Computer bauen kann, der alle gültigen Sätze der Mathematik automatisch ableiten kann. Das menschliche Denken war also nicht zur Gänze formalisierbar, nicht mechanisierbar. Der strenge mathematische Beweis der Existenz von formal unentscheidbaren arithmetischen Sätzen und der Nichtdemonstrierbarkeit der Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems im gleichen System selbst beweist die Notwendigkeit der geistigen Ingenuität des Menschen, um neue mathematische Axiome erzeugen zu können.
Die enge Verbindung zwischen mathematischer Logik und Automatentheorie ist ja ebenfalls aus Gödels Theorem von 1931 ableitbar.

Indem Gödel nämlich zeigte, daß die grundlegenden Begriffe der Logik wie wohlgeformte Formel, Axiom, Ableitungsregel, Beweis und so weiter im wesentlichen rekursiv (effektiv) sind, hat er die mathematische Logik auf eine Theorie der Berechenbarkeit reduziert. Rekursive Funktionen sind solche, die auf/mit Turing-Maschinen berechnet werden können. Daher kann die mathematische Logik vom Standpunkt der Informatik aus behandelt werden.[19] Umgekehrt kann die logische Organisation eines Automaten durch eine Struktur von idealisierten Schalt- und Verzögerungselementen repräsentiert und dann in logische Symbole übersetzt werden. Analog zu Gödels selbstreferentiellem Satz hat Johann von Neumann einen Automaten konstruiert, der eine Beschreibung seiner selbst enthält, einen *selbstreproduzierenden* Automaten. Beiträge von Kurt Gödel zu dieser Problematik finden sich in einem Buch Johann von Neumanns.[20] Zum Problem, wie weit der menschliche Geist formalisierbar und damit mechanisierbar, das heißt maschinell repräsentierbar sei und, umgekehrt, wie sehr Maschinen das menschliche Denken simulieren können, hat Gödel selbst 1951 definitiv Stellung genommen:

Der menschliche Geist ist dazu unfähig, alle seine mathematischen Intuitionen formulieren (oder mechanisieren) zu können, das heißt, wenn es ihm gelungen ist, einen Teil davon zu formulieren, dann bedarf gerade diese Tatsache eines neuen intuitiven Wissens, zum Beispiel der Konsistenz dieses Formalismus. Diese Tatsache kann die „Inkomplettierbarkeit" der Mathematik genannt werden. Auf der anderen Seite besteht die Möglichkeit, auf der Basis dessen, was bislang bewiesen worden ist, daß eine theorem-beweisende Maschine existiert (und sogar empirisch entdeckt werden kann), welche in der Tat der mathematischen Intuition äquivalent ist, aber von der nicht bewiesen werden kann, daß sie es ist, von der sogar nicht einmal bewiesen werden kann, daß sie nur korrekte Theoreme der finitären Zahlentheorie hervorbringt.[21]

Gödel gibt also der künstlichen Intelligenz große Chancen, besteht aber andererseits auf dem nichtmechanistischen Charakter des menschlichen Geistes, verstanden im Sinne von Fußnote 17b.
Auf eine Maschine, so intelligent wie Gödel, werden wir allerdings lange warten müssen.

Anmerkungen

[1] Georg Kreisel, „Kurt Gödel 1906–1978". *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society,* Vol. 26, Dezember 1980, S. 149–224

[2] Douglas R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.* Basic Books, New York 1979

[3] Zitiert nach Curt Christian, „Leben und Wirken Kurt Gödels". *Monatshefte für Mathematik* 89, Springer Verlag, 1980, S. 263. – Österreich, insbesondere die Zweite Republik, hat sich um Gödel wenig gekümmert. Vor dem Zweiten Weltkrieg erhielt er nur eine unbeamtete Privatdozentur. Danach wurde ihm erst 1966 eine Honorarprofessur für Mathematik an der Universität Wien verliehen. Die

politischen Erfahrungen der dreißiger Jahre und die Ignoranz des mediokren akademischen Betriebes nach 1945 verursachten eine sehr kühle Distanz Gödels gegenüber Österreich.

[4] Mündliche Mitteilung an P. W., Jänner 1985, Wien.

[5] Arend Heyting, „The Intuitionist Foundations of Mathematics" (1931). In: *Philosophy of Mathematics,* Hrsg. P. Benacerraf und H. Putnam. Prentice Hall, New Jersey, 1964, S. 42

[5a] David Hilbert, „Über das Unendliche". *Mathematische Annalen* 95 (1926), S. 161–190

[6] Thoralf Skolem, „Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen". *Videnskapsselskapets skrifter,* I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse no. 3, 1919

[7] H. Behmann, „Beiträge zur Algebra der Logik und zum Entscheidungsproblem". *Math. Ann.* Bd. 86, 1922, S. 163–229. – Hier hat Behmann ein übersichtliches Entscheidungsverfahren für den engeren Funktionenkalkül angegeben. Behmann führte später mit Gödel einen kuriosen Prioritätsstreit.

[8] Jacques Herbrand, „Sur la non-contradiction de l'arithmétique". *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 166, S. 1–8, 1931

[9] In: Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel, a source book in mathematical logic 1879–1931.* Harvard University Press, Cambridge 1967, S. 510

[10] L. E. J. Brouwer, „Mathematik, Wissenschaft und Sprache". *Monatshefte für Mathematik und Physik* 36 (1929), S. 153–164. – Brouwer schreibt auf S. 154: „Es ist dieses gemeinsame Substrat aller Zweiheiten, das die Urintuition der Mathematik bildet, deren Selbstentfaltung u. a. das Unendliche als gedankliche Realität einführt . . ." Bezüglich der Sicherheit und Exaktheit der Sprache zur Gedanken- und „Willensübertragung" sagt er auf S. 157: „Es gibt also auch für die reine Mathematik keine sichere Sprache, d. h. keine Sprache, welche in der Unterhaltung Mißverständnisse ausschließt und bei der Gedächtnisunterstützung vor Fehlern . . . schützt. Diesem Umstand ist nicht dadurch abzuhelfen, daß man, wie es die formalistische Schule macht, die mathematische Sprache . . . selber einer mathematischen Betrachtung unterzieht, ihr durch Umarbeitung die Genauigkeit und Stabilität eines materiellen Instruments oder eines Phänomens der exakten Wissenschaft verleiht und sich dabei in einer Sprache zweiter Ordnung oder Übersprache über sie verständigt."

[11] Entnommen der Notiz 011518, Gödel-Nachlaß, University of Princeton Library

[12] Siehe Herbert Feigl, „The Vienna Circle in America". In: Fleming & Bailyn (Hrsg.), *The Intellectual Emigration.* Harvard University Press, Cambridge

[13] Gödels Brief wurde abgedruckt in einem Beitrag von I. Grattan-Guinness: „In Memorian Kurt Gödel: His 1931 Correspondence with Zermelo on His Incompletability Theorem". *Historia Mathematica* 6 (1979), S. 294–304. Der einschlägige Hinweis Gödels befindet sich auf S. 8 und 9 des Briefes (S. 301 im Beitrag). Gödel hatte im Grunde auf denselben Tatbestand in der berühmten, aber etwas kryptischen Fußnote (48a) seines Aufsatzes von 1931 hingewiesen. NB: Beim Briefwechsel mit Zermelo gab es ein Mißverständnis, weil Zermelo unter dem Begriff des Beweises auch nichtfinitäre Beweis-Beziehungen zuließ, während Gödel den Sprachgebrauch Hilberts beibehielt, wonach Beweise alle finit sein müssen.

[14] Paul Finsler: „Formale Beweise und die Entscheidbarkeit" (1936). *Mathematische Zeitschrift* 25 (1926), S. 676–682; Nachdruck in: Finsler: *Aufsätze zur Mengenlehre.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1975

[15] Alfred Tarski, „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen". In: Karel Berka/Lothar Kreiser, *Logik-Texte.* Akademie Verlag, Berlin 1971, S. 559

[16] Diese und die frühere Passage sind übersetzt aus einer Lobrede von Neumanns anläßlich der Verleihung des Albert-Einstein-Preises an Gödel. *New York Times,* 15. März 1951, S. 31; abgedruckt auch in der Einleitung zum Symposiumsband anläßlich Gödels 60. Geburtstag.

[17] G. W. Leibniz, *Opuscules et fragments inédits de Leibniz.* Hrsg. L. Couturat, Alcan, Paris 1903; kurz dargestellt in dem weitverbreiteten Lehrbuch von C. I. Lewis, *A Survey of Symbolic Logic.* University of California Press, Berkeley 1918, S. 11. Gödel hat sehr wahrscheinlich beide Bücher gelesen; das erste, weil er sich früh für Leibniz faszinierte, das zweite, weil es zu der damals kleinen Handvoll von Büchern über die neue mathematische Logik gehörte.

[17a] Dies ist erlaubt, da das letzte Glied c in Sub (a, n, c) eindeutig durch a und n bestimmt wird, womit die Existenz der Zahlenfunktion sub berechtigt ist. Die exakte Definition dieser Funktion lautet: sub (a, n) ist die Gödelzahl (zum Beispiel c) desjenigen Satzes (zum Beispiel C), den man erhält, wenn man in der Satzform (zum Beispiel A) mit der Gödelzahl a alle ihre freien Variablen (zum Beispiel x, y, z, und so weiter, oder auch gar keine, falls der Satz keine freien Variablen hat) durch die Zahl n (beziehungsweise durch n-viele Striche) ersetzt. Das ganze als Formel:

$$\boxed{\text{sub}\,(a, n) = \text{Göz}\,[A\,(\ldots/\bar{n})], \text{ wobei } a = \text{Göz}\,[A] \text{ und } \bar{n} = \underbrace{|||\ldots|}_{n\text{-mal}} \text{ ist.}}$$

Oder kürzer:

$$\boxed{\text{sub}\,(a, n) = \text{Göz}\,[\ulcorner \text{Göz}^{-1}\,(a) \urcorner\,(\ldots/\bar{n})].}$$

[17b] Um Mißverständnissen vorzubeugen: Der Intuition kommen dabei keine mysteriösen Kräfte zu, die jede Maschine übersteigt, denn schließlich wird auch die Wahrheit von G formal bewiesen, wiewohl in der Metatheorie. Gödels Beweis kann vielmehr *mutatis mutandis* genausogut gegen Intuitionismus als gegen Formalismus angewandt werden (es sei denn, die Intuition wird – gottähnlich – als transfinit aufgefaßt); was den Intuitionisten bloß deswegen nicht anficht, weil er sich (fälschlich!) nicht um Widerspruchsfreiheit und daher um Vollständigkeit kümmert. Daß die (finite!) Intuition doch mit einer Digitalmaschine äquipollent ist, wurde eigentlich schon von Turing (1936) und Post (1937, 1941) behauptet, was – in etwas verschnörkelter Weise – schließlich auch von Gödel (1951) unterschrieben werden mußte: siehe das vor Fußnote 21 angeführte Zitat, S. 98. Zu Gödels Bemerkung muß allerdings angemerkt werden, daß er den Begriff des menschlichen *Geistes* als etwas Überhistorisches und schon deswegen Transfinites und sogar Gottähnliches auffaßt! Sein Geistesbegriff ist also nicht der empirisch-psychologische, welcher Sterblichkeit sowie Wahrnehmungs- und Denkbeschränkungen ernst nimmt, sondern eher der transzendentale Begriff etwa des objektiven Idealismus Hegels!

[18] Eine einschlägige, rein zahlentheoretisch unentscheidbare Formel wurde erstmals von J. Paris und L. Harrington veröffentlicht: „A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic". In: J. Barwise (Hrsg.), *Handbook of Mathematical Logic,* North Holland Publ. Co., Amsterdam 1977

[19] Alan M. Turing, „On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem". *Proceedings of the London Mathematical Society* 42, 1936–1937, S. 230–265

[20] John von Neumann, *Theory of Selfreproducing Automata.* Hrsg. Arthur W. Burks. University of Illinois Press, 1966, S. 25 und S. 51–56

[21] Zitiert nach einem unpublizierten Vortrag von Gödel in Providence, Rhode Island, am 26. Dezember 1951; Josiah Willard Gibbs Lecture. In: Hao Wang, *From Mathematics to Philosophy.* Routledge & Kegan Paul, London 1974, S. 324. Den wahrscheinlich erschöpfendsten Überblick liefert Judson Chambers Webb: *Mechanism, Mentalism and Metamathematics,* Reidel Publ. Co., Dordrecht 1980; mehr auf kognitive Psychologie und Automatentheorie hin orientiert ist Raymond J. Nelson: *The Logic of Mind,* Reidel Publ. Co., Dordrecht 1982.