Zur Kunst des formalen Denkens: Rainer Burckhard, Wolfgang Maas, Peter Weibel (Hsg), Wien 2000

Kuriosa der Zahlenkunde und die Kunst – kurz gefaßt und leicht faßlich dargestellt (2000)

Peter Weibel

S. 21 – 67

Die Lust an der Multiplikation der Zahl.
Die Trunkenheit ist Zahl. Die Zahl ist im Individuum.

Charles Baudelaire, 1869

Ich blicke euch an, ihr Zahlen,
und ihr erscheint mir verkleidet als Tiere, in euren Fellen,
die Arme gestützt auf ausgerissene Eichen.
Ihr gebt mir Einheit zwischen
der Schlangenbewegung
des Weltalls und dem Tanz
der Waagschalen
ihr erlaubt mir,
die Jahrhunderte zu verstehen als
Zähne eines schnellen Gelächters.
Meine Augen sind aufgerissen, begierig
ALLES zu wissen, was ICH ist,
wann der Teiler zur Eins schrumpft.

Velimir Chlebnikov, vor 1913

Zahlen in Expansion sind ebenso wirklich
wie Tiere, die sich vermehren
Die Zahlen vermehren sich wie die Tiere
Die Tiere vermehren sich wie die Zahlen
In Bewegung sind die mathematischen und
die physikalischen Gesetze wirkliche Tiere
Die Zahlen sind lebende Tiere

Mario Merz, 1970

Abbildung 1.1. Oberhuber, Rechnung, 1952

Symbole, Persönlichkeiten, Zahlen

Man muß kein fanatischer Numerologe sein, um daran zu glauben, daß einige Zahlen "Persönlichkeit" haben. Wer wird nicht darein übereinstimmen, daß die Zahl 13 einen dubiosen Charakter hat, der Unglück verspricht, schwärzer als der Schatten eines schwarzen Rabens. Die Zahl 7 hat seit alters die Reputation, magisch zu sein: die 7 Schöpfungstage, die 7 Todsünden, die 7 Säulen der Weisheit, der Agent 007, die 7 Weltwunder, die 7 Zwerge, das Buch mit 7 Siegeln, die 7 Planeten, welche die Namen unserer 7 Wochentage lieferten, das verflixte 7. Jahr, die 7 Leben der Katze, die 7 hebräischen Namen Gottes usw. Erst Galileo hat uns erklärt, was schon viel früher bekannt war: die hohe Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln eine 7 zu würfeln. Die Zahl 3 gilt nicht erst seit den 3 Grazien oder der Trinität von Vater, Sohn und Heiliger Geist als heilig, sondern schon Pythagoras nannte sie die vollkommene Zahl, da sie den Anfang, die Mitte und das Ende ausdrücke. Selbstverständlich hat man auch einige Beziehungen zwischen Erotik und Mathematik festgestellt, und selbstverständlich in Wien [Hug-Hellmuth, 1916]. So wurden die geraden Zahlen mit weiblichen und die ungeraden Zahlen mit männlichen Eigenschaften versehen, und vice versa, je nach Kultur und Er-

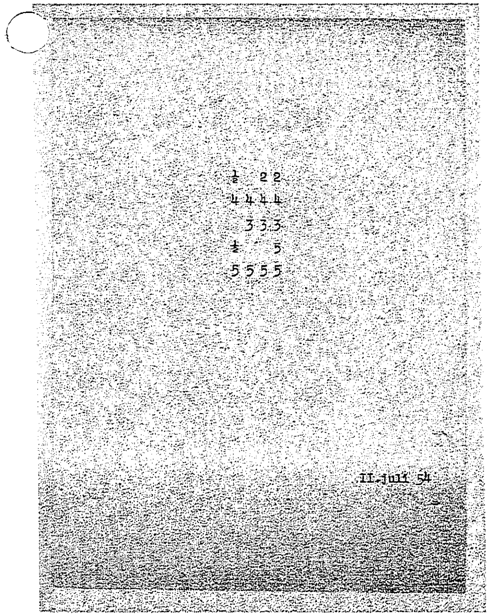

Abbildung 1.2. Gerhard Rühm, Zahlengedicht, 1954

fahrung. Von den Ägyptern bis zu Aristoteles galt die Einheit als Mutter und Ursprung aller Zahlen, ohne selbst eine Zahl zu sein. 1839 veröffentlichte der französische Mathematiker M. Vincent in einer Arbeit über den Ursprung der Zahlen, die auf den Pythagoräern und Boethius fußte, die Vermutung, daß die ersten 3 Ziffern die Geschlechter und deren Vereinigung versinnbildlichen, indem sie als charakteristische Körperteile der Frau und des Mannes und dann die Drei als deren Vereinigung gedeutet worden seien. Die Neun deutete Vincent als Thyphallus, als Zeichen der männlichen Kraft. Denn die Neun ist die Quadratzahl der Drei, die ihrerseits die Vereinigung des männlichen und weiblichen Prinzips darstellt. Das Quadrat oder die zweite Potenz wurde bei den Griechen kurzweg Potenz genannt. Na also! Neben dieser Hypothese, die Entstehung der Namen und Zeichen der Zahlen mit dem sexuellen Leben in Zusammenhang zu bringen, erfreute sich eine andere einer großen Verehrung, nämlich die Zahlen mit Lastern und Tugenden zu verbinden.

So schreibt im 15. Jahrhundert Luca Pacioli in seiner "Divina Proportione": "Die vollkommenen Zahlen endigen abwechselnd mit 6 und 8 und können eine andere Randziffer nicht haben, denn die Traurigen leben ordnungslos, die Guten und Vollkommenen bewahren immer die vorgeschriebene Ordnung". Die Triaden 4, 5, 6 und 7, 8, 9 in der Folge von 1, 2, 3 repräsentierten demnach Güte, Gerechtigkeit, Schönheit und Größe, Gesundheit, Kraft.

Die Vier, für die Pythagoräer der "Schlüssel der Natur", sei als Beispiel der naturwissenschaftlichen, kosmologischen Symbolik der Zahlen erwähnt, die 4 Elemente Erde, Feuer, Wasser, Luft.

Die Griechen wie die Chinesen um das Jahr 1120 v. Chr. haben laut Montucla's "Histoire des mathématiques" das Weltall aus den ersten vier geraden und den ersten vier ungeraden Zahlen zusammengesetzt. Die ersten vier ungeraden Zahlen stellen dabei die reinen und himmlischen Elemente dar, die geraden entsprechen denselben Elementen mit irdischer Unreinheit verbunden. Das Weltall, die Verbindung aller himmlischen und irdischen Elemente, wurde also durch die Zahl 36 dargestellt, das heißt die Summe dieser 8 Zahlen [Turing, 1952], [Thompson, 1966], [Thom, 1972], [Thom, 1974], [Cook, 1979], [Mandelbrot, 1983], [Frängsmyr et al., 1984], [Ghyka, 1977], [Coleman und Holmes, 1988]. Die meisten dieser Zahlen haben also "Persönlichkeit", "Charaktereigenschaften", die von außen, von Menschen, von der Ideologie, von der Erfahrung an sie herangetragen werden.[1] Doch gibt es auch Zahlen, die von innen her interessante Eigenschaften haben, Zahlen, die auf inhärente Weise interessante "Persönlichkeiten" sind, wie zum Beispiel die Primzahlen.

Primzahlen

Für mich haben die Primzahlen am meisten "Persönlichkeit", denn sie sind ein Paradebeispiel für jene Kuriosa der Zahlenkunde, die jenseits ihrer Merk-Würdigkeiten, die der Aberglaube so gerne unter seine Fittiche nimmt, zu fundamentalen Einsichten in die Natur der Zahlen und zu komplexen Theoremen der Zahlentheorie geführt haben[2] [Stewart, 1995], [Conway und Guy, 1996], [Derlin, 1998], [Hoffman, 1998], [Singh, 1998], [Basieux, 1999]. Eine natürliche Zahl p heißt Primzahl, wenn p *ungleich* 1 ist und nur die (trivialen, positiven) Teiler 1 und p hat. Primzahlen sind also die positiven ganzen Zahlen, die natürlichen Zahlen, die nur durch sich selbst oder 1 teilbar sind, also unzerlegbare Zahlen. Primzahlen sind $\ldots, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots, 229, \ldots, 5\,693, \ldots, 199\,999, \ldots$ und so weiter. Euklid hat bereits vor 2300 Jahren gezeigt, daß es keine obere Schranke für die Prim-

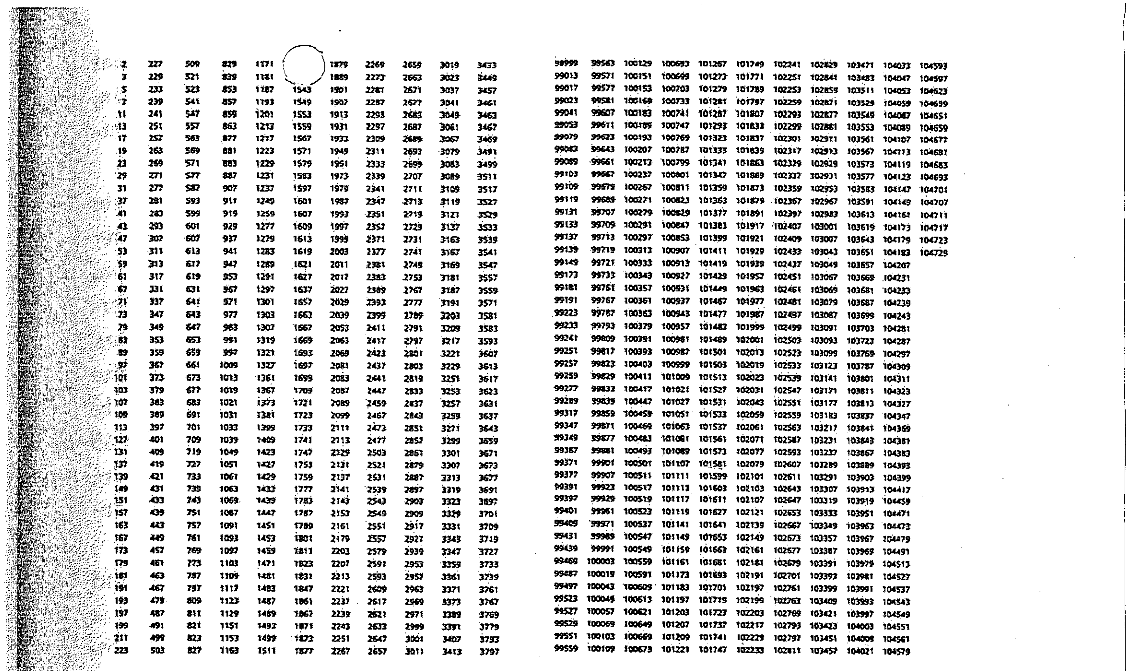

Abbildung 1.3. Ecke Bonk, Die ersten 10 000 Primzahlen, 1999 (Detail)

zahlen gibt. Es gibt nur die größte bekannte Primzahl.

Es gibt ganze Bücher, die nur aus der Auflistung aller bisher bekannten Primzahlen bestehen. Ein 8-bändiges Werk, das alle Primzahlen, wenn auch fehlerhaft, von 2 bis 100 330 201 aufzählt, das sind 5 761 456 Primzahlen, gibt es in Wien von Kulik, der fast sein ganzes Leben darüber verbracht hat. Vor einiger Zeit haben C. L. Baker und F. J. Gruenberger von der Rand Corporation auf einem Computer die ersten 6 Millionen Primzahlen, von 2 bis 104 395 289, berechnet. Die größte gegenwärtig bekannte Primzahl ist die am 1. Juni 1999 entdeckte Primzahl $2^{6972593} - 1$.

Während es Methoden gibt, zu testen, ob eine gegebene Zahl eine Primzahl ist, gibt es keine Formel, die genau alle Primzahlen erzeugt. Allerdings gibt es Ausdrücke, zum Beispiel durch die Robinson-Formel, mit der man bei weitem nicht alle, aber zumindest eine Gruppe innerhalb der Primzahlen erzeugen kann: $R(k, n) = 2^n k + 1$. Für bestimmte Werte von k und n erzeugt diese Formel Primzahlen. Für $k = 5$ und $n = 1947$ erhalten wir die größte bekannte Robinson-Primzahl, die 586 Ziffern hat. Eine zweite Formel, die einige Primzahlen erzeugt, stammt von Fermat: $2^{2^n} + 1$. Fermat glaubte, diese Formel würde für alle Werte von n eine Primzahl erzeugen, doch wurden bis zum Jahr 1980 nur 5 Primzahlen gemäß dieser Formel entdeckt, nämlich 3, 5, 17, 257 und 65 537.

Im Alter von 19 Jahren hat Carl Friedrich Gauß 1798 eine interessante Entdeckung gemacht, um eine Schwierigkeit bei der Konstruktion von regelmäßigen Polygonen von n Seiten zu beheben, wo n eine Primzahl ist, also bei der Konstruktion von Heptagon, 11-gon, 17-gon, usw. Er fand heraus, daß so eine Konstruktion nur möglich ist, wenn die Anzahl der Seiten des regelmäßigen Polygons eine Fermatsche Primzahl ist. Eine Euklidische Konstruktion eines regelmäßigen Polygons mit einer primen Seitenanzahl ist also nur dann möglich, wenn die Anzahl der Seiten 3, 5, 17, 257 oder 65 537 ist. O. Hermes verbrachte 10 Jahre, dieses 65 537-gon zu konstruieren. Sein Manuskript liegt in einer großen Schachtel in der Universität Göttingen.

Andere Formeln zur Erzeugung begrenzter Serien von Primzahlen sind Eulers Polynom $x^2 - x + 41$, das 40 verschiedene Primzahlen für $x = 1, 2, 3, \ldots, 40$ ergibt. Legendre's Polynom $2x^2 + 29$ von 1798 erzeugt 29 Primzahlen für $x = 0, 1, 2, \ldots, 28$. Untersucht wurden auch Serien von Primzahlen mit einer gleichbleibenden Differenz, zum Beispiel 11, 17, 23, 29, wo die Differenz stets 6 ist. Eine Serie von 10 Primzahlen mit der gemeinsamen Differenz von 210 beginnt mit 199.

Bis heute kennt man jedoch noch kein Verfahren, wie man zu irgendeiner Primzahl ihren unmittelbaren Nachfolger angeben kann. Nur eines wissen wir seit Euklid mit Sicherheit: "Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgegebene Anzahl von Primzahlen", die Anzahl der Primzahlen ist also unendlich. Ein Hauch von Unendlichkeit umweht die Primzahlen, doch sie zeigen uns bereits die Unendlichkeit nicht als endlosen Brei, sondern gegliedert. Wie es später Georg Cantor (1845-1918) mit den Begriffen Mächtigkeit und Überabzählbarkeit der unendlichen Zahlenmengen gelungen ist. Der Struktur dieser gegliederten Unendlichkeit verdankt sich auch das noch ungelöste Problem, ob es endlich oder unendlich viele Primzahlzwillinge (wie 17 und 19) gibt.

Das Symbol der Unendlichkeit: die Spirale. Im Hauch der Unendlichkeit der Primzahlen gewinnt bereits das Unendlichkeitssymbol Spirale Kontur. Teilbarkeit und Unteilbarkeit des Lebendigen als Verschränkungen, welche sich in der gleichbleibenden Differenz bei bestimmten mathematischen Serien der Primzahlen spiegeln, kulminieren in der vollkommenen Zahl, wel-

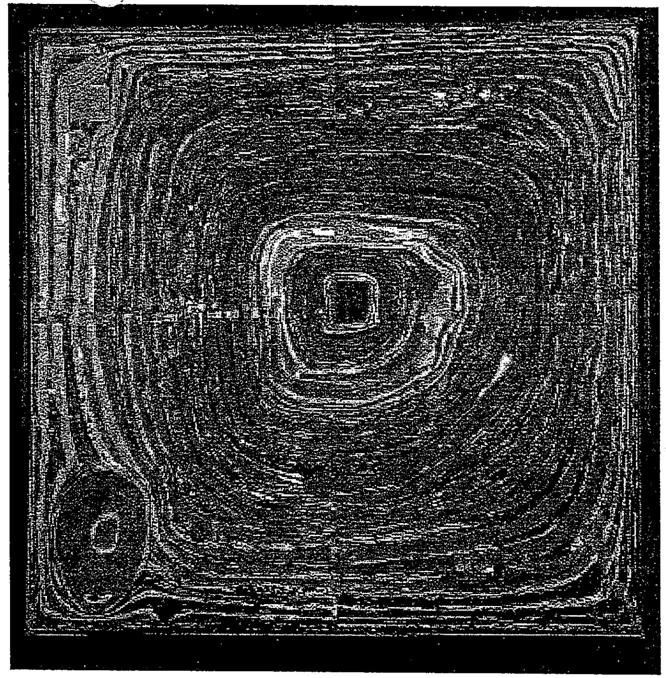

Abbildung 1.4. Friedensreich Hundertwasser, Der große Weg, 1955. ©1998 Gruener Janura AG, Glarus Schweiz

che gleich mit der Summe ihrer Teiler ist. Was ist das für eine wundersame Identität, die teilbar und geteilt ist, in der Summe ihrer Teiler aber wieder aufersteht? Ist es eine gleichsam mythische Identität ähnlich der des ägyptischen Totengottes Osiris, der als Vegetationsgott zugleich auch für die Auferstehung bürgt? Blaise Pascal, der Mathematiker und religiöse Denker, hat eine Spirale konstruiert, deren Tangentialwinkel konstant ist und deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt. Normalerweise hat nur der Kreis einen konstanten Tangentialwinkel und es gehört zum Wesen der Spirale, daß ihr Tangentialwinkel nicht konstant ist. Diese paradoxe, nur mathematisch konstruierbare Spirale hat Pascal als Modell für den Beweis der Unsterblichkeit der Seele genommen: eadem mutata resurgo. Auch nach ihrer Verwandlung (der Tod) wiederaufersteht sie als dieselbe.

Siehe Abbildung 1.18 auf Seite 53 und die Farbabbildungen 1.19 und 1.20 (Seite 137, 138).

Die Goldbachsche Vermutung

Da in der Urgeschichte der Mathematik der Gegensatz von geraden und ungeraden Zahlen so eine große Rolle spielte, ja sogar von erheblicher produktiver Kraft war, kommt den Primzahlen schließlich noch eine besonders rätselhafte Funktion zu. Der Königsberger Mathematiker Christian Goldbach (1690-1764) hat nämlich 1742 in einem Brief an Euler die Vermutung ausgesprochen, daß jede gerade Zahl (größer als 2) als Summe zweier Primzahlen, zumeist sogar mehrfach, dargestellt werden kann:

$$\begin{array}{lllll} 88 & = 5+83 & = 29+59 & = 41+47 & \\ 92 & = 3+89 & = 13+79 & = 19+73 & = 31+61 \end{array}$$

Aber genügen auch in den fernsten Zahlenregionen nur zwei Primzahlen, um durch Addition alle geraden Zahlen zu bilden? Euler hat Goldbach geantwortet: "Daß aber jeder numerus par eine Summe duorum primorum sei, halte ich für ein ganz gewisses Theorema, ungeacht ich dasselbe nicht demonstrieren kann". Der Beweis für Goldbachs Vermutung ist immer noch ausständig. Am nächsten kommt I. M. Winogradows Ergebnis, das besagt, daß es eine ganze Zahl N gibt, so daß jede ganze Zahl größer als N als die Summe von nicht mehr als 3 Primzahlen repräsentiert werden kann, wenn n ungerade ist, und von 4 Primzahlen, wenn n geradzahlig ist. Vier Primzahlen reichen also stets aus, um jede gerade Zahl zu bilden. Nach Chen ist jede hinreichend große gerade Zahl als Summe von $p+q$ darstellbar, wobei p eine Primzahl ist und q Produkt von höchstens zwei Primzahlen.

Vollkommene Zahlen und Mersennesche Primzahlen

Eine ähnlich paradoxe Rolle spielen die Mersenneschen Zahlen, die eine besondere Art von Primzahlen sind und als solche keine ganzzahligen Teiler *ungleich* 1 haben, und die Vollkommenen Zahlen, welche zu den Mersenneschen Zahlen in einer ähnlichen Beziehung stehen wie die geraden Zahlen zu den Primzahlen.

Rekapitulieren wir: Primzahlen p sind nur durch sich selbst oder durch 1 teilbar, haben also keine (ganzzahligen) Teiler zwischen 1 und p bzw. sind unteilbar. Vollkommene Zahlen sind hingegen gerade diejenigen Zahlen m, für die die Summe aller kleineren positiven Teiler von m die Zahl m selbst wieder ergeben. Es zeigt sich nun, daß jede Vollkommene Zahl genau eine Mersennesche Primzahl als Teiler besitzt und umgekehrt, daß jede Mersennesche Primzahl genau eine Vollkommene Zahl festlegt. Obwohl in ihren

Teilbarkeitseigenschaften so gegensätzlich, besteht also eine eindeutige Zuordnung zwischen den beiden Zahlenmengen. Jeder Mersenneschen Primzahl entspricht eine Vollkommene Zahl und es gibt keine bekannte Vollkommene Zahl, die nicht mit einer Mersenneschen Primzahl korrespondiert. Wie ist das möglich?

Es gibt unter den ersten 30 000 000 Zahlen nur vier Vollkommene Zahlen:

$$\begin{array}{rcl} 6 & = & 1+2+3 \qquad \text{wobei 6 durch 1, 2 und 3 teilbar ist.} \\ 28 & = & 1+2+4+7+14 \\ 496 & = & 1+2+4+8+16+31+62+124+248 \\ 8128 & = & 1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+ \\ & & 2032+4064 \end{array}$$

Die nächste Vollkommene Zahl ist 33 550 336, welche erst 1460 festgestellt wurde, während man die ersten vier bereits seit 2000 Jahren kannte und mit Euklid die Vollkommenen Zahlen nannte. Bis heute kennen wir 38 Vollkommene Zahlen und jede davon ist geradzahlig. Man kennt keine ungeraden Vollkommenen Zahlen. Vollkommene Zahlen haben interessante Eigenschaften, zum Beispiel daß sie, außer 6, als letzte Ziffernsumme 1 haben, wenn man in einem iterierten Prozeß immer wieder die Summe ihrer Ziffern bildet.

$$496: \; 4+9+6=19, \;\; 1+9=10, \;\; 1+0=1\,.$$

Jede vollkommene Zahl, außer 6, kann auch als Summe der Kuben aller ungeraden Zahlen bis zu einer gewissen Stelle geschrieben werden, zum Beispiel

$$\begin{array}{rl} 28 = & 1^3+3^3 \\ 496 = & 1^3+3^3+5^3+7^3\,. \end{array}$$

Sie haben vielleicht auch bemerkt, daß die Teiler der vier vollkommenen Zahlen mit 1 beginnen und sich zunächst verdoppeln, bis an einer Stelle das Doppelte des vorhergehenden Teilers um 1 vermindert erscheint und von da an sich die Teiler wieder verdoppeln. Der kritische Übergang erfolgte

für	bei den Teilern	
6	2	3
28	4	7
496	16	31
8128	64	127

Wenn man diese beiden Teiler miteinander multipliziert, erhält man wiederum die jeweilige Vollkommene Zahl. Bei diesen Teilern kann man auch ersehen, daß der erste offensichtlich eine Potenz von 2, der zweite die um 1 verminderte nächsthöhere Potenz von 2 ist. V läßt sich also definieren als die Multiplikation von zwei Potenzen von zwei, wobei von letzterer 1 abgezogen wird.

$$\begin{aligned} V_1 &= 6 = 2^1 \cdot (2^2 - 1) \\ V_2 &= 28 = 2^2 \cdot (2^3 - 1) \\ V_3 &= 496 = 2^4 \cdot (2^5 - 1) \\ V_4 &= 8128 = 2^6 \cdot (2^7 - 1) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Struktur der geraden Vollkommenen Zahlen $V_i = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$, die Euklid um 300 v. Chr. und Euler 1750 gefunden haben, die aber nur dann Vollkommene Zahlen erzeugt, wenn $2^n - 1$ nicht teilbar ist, also eine Primzahl. Zum Beispiel würde auch 120 dieser Struktur genügen, aber dennoch ist sie keine Vollkommene Zahl: $120 = 2^3(2^4 - 1) = 8 \cdot 15$, aber 15 ist keine Primzahl. Nur wenn $2^n - 1$ nicht teilbar, also eine Primzahl ist, liefert die Formel $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ eine Vollkommene Zahl, diese perfekt teilbare Zahl. Der Satz von Euklid-Euler lautet also:

Eine gerade Zahl V ist genau dann vollkommen, wenn V von folgender Struktur ist:

$$V = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

wobei $2^n - 1$ eine Primzahl ist.

In dieser paradoxen Definition der perfekten Teilbarkeit mit Hilfe einer teilweisen Nichtteilbarkeit ist auch die Dialektik von Gerade und Ungerade mit eingeschlossen. Denn es gibt nur gerade Vollkommene Zahlen dieser Bauart, während die Primzahlen $(2^n - 1)$, welche für deren Definition benötigt werden, alle ungerade sind.

Primzahlen von der Form $2^n - 1$ sind ganz besondere Primzahlen, nämlich die sogenannten Mersenneschen Primzahlen M_i, zur Erinnerung an Pater Marin Mersenne (1588-1648) so genannt, der 1644 ankündigte, einige neue vollkommene Zahlen entdeckt zu haben, allerdings weder richtig noch vollständig, wobei er aber feststellte, daß $2^n - 1$ Primzahlen ergibt. Bis heute wissen wir dies für 38 Werte von n, angefangen mit $n =$ 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1 279, 2 203, 2 281,

3 217, 4 253, 4 423, 9 689, 9 941, 11 213, 19 937. Die 10 größten der 38 gegenwärtig bekannten Werte von n für die $2^n - 1$ eine Primzahl ergibt sind $n =$ 110503, 132049, 216091, 756839, 859433, 1257787, 1398269, 2976221, 3021377, 6972593. Für den letztgenannten Wert von n ergibt $2^n - 1$ die größte gegenwärtig bekannte Primzahl. Dies ist eine Zahl, die in der üblichen Dezimalschreibweise über 2 Millionen Stellen hat (siehe `http://www.utm.edu/research/primes/largest.html`).

Es gibt keine allgemein gültige Methoden, um Mersenne Primzahlen zu erzeugen. Notwendig ist auf jeden Fall, daß n selbst eine Primzahl ist. Naheliegend wäre für die Mersennesche Primzahlen die Behauptung: $2^n - 1$ ist stets eine Primzahl, wenn n eine Primzahl ist. Doch wir haben gesehen, daß bestimmte Primzahlen (wie zum Beispiel 23) nicht in der Liste von denjenigen Zahlen aufscheinen, welche als Werte für n bei der Formel $2^n - 1$ eine Mersennsche Primzahl ergeben. Daher muß man für jede Primzahl n separat nachprüfen, ob $2^n - 1$ wieder eine Primzahl ergibt. Die Art, wie dieser Nachweis jeweils geschehen ist, spiegelt interessante Wandlungen in der Arbeitsweise der Zahlentheorie wider. Während bis vor wenigen Jahrzehnten Mathematiker diesen Nachweis mühsam mit Papier und Bleistift führen mußten, ermöglichte die Erfindung elektronischer Rechenmaschinen, zu viel größeren Werten von n vorzustoßen. Anfänglich hat man dazu überwiegend Supercomputer in Rechenzentren verwendet. Dagegen wurden die letzten vier Mersenneschen Primzahlen (für $n =$ 1398269, 2976221, 3021377, 6972593) durch eine mittels Internet koordinierte Zusammenarbeit von mehreren tausend Hobbyforschern ermöglicht, die die nicht benötigte Rechenzeit auf ihrem PC hierfür zur Verfügung gestellt haben. Auf der Webpage `http://www.mersenne.org/prime.htm` kann sich jederman über den gegenwärtigen Stand dieser Suche nach immer größeren Primzahlen informieren und kann dort auch erfahren, wie er sich selbst an der Aktion GIMPS (=The Great Internet Mersenne Prime Search) beteiligen kann.

Die Vollkommenen Zahlen V_6 bis V_8 wurden im 16. Jahrhundert entdeckt, die V_9 erst am Ende des 19. Jahrhunderts. Ob es eine größte Vollkommene Zahl gibt, wissen wir bis heute genauso wenig, wie ob die Mersenneschen Primzahlen und damit die Vollkommenen Zahlen unendlich sind. Als Zwischenlösung müßten wir aber definitiv wissen, ob es wirklich keine ungeraden Vollkommenen Zahlen gibt. Wenn sie existieren sollten, müßten sie die Form $12m + 1$ oder $36m + 9$ haben, wobei m eine Primzahl ist. Bisher konnte allerdings nur nachgewiesen werden, daß es keine ungeraden Vollkommenen Zahlen gibt, die kleiner als 1.4×10^{18} sind. Bis zu dieser Zahlengrenze wissen wir also, daß es keine gibt. Gibt es welche darüber?

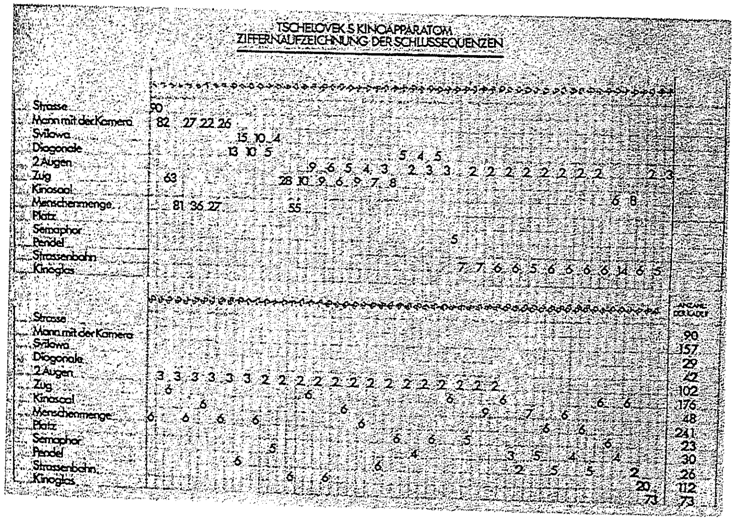

Abbildung 1.5. Dziga Vertov, Ziffernaufzeichnung der Schlußsequenz von "Celoviek's' kinoapparatom", 1929

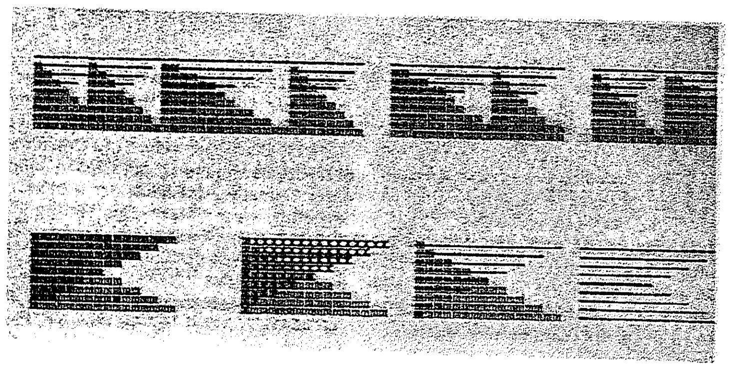

Abbildung 1.6. Peter Kubelka, Vorstudien zu Arnulf Rainer, 1958-60

Befreundete Zahlen

In die Struktur der Teilbarkeit eingebettet sind auch die sogenannten Befreundeten Zahlen, welche schon die Araber kannten. El Madchaiti, der

Madrider, hat angeleitet, man solle die Zahlen 220 und 284 aufschreiben, die kleinere dem Objekt der Begierde zum Essen geben und selbst die größere essen. Er selbst habe die erotische Wirkung davon in eigener Person erprobt, genau wie Ibn Chaldun von den wunderbaren Kräften dieser Zahlen als Talisman Gebrauch gemacht habe.

Befreundete Zahlen heißen zwei natürliche Zahlen m und n dann, wenn die Summe aller positiven Teiler d von m außer m selbst n ergibt, und die Summe aller positiven Teiler d von n außer n selbst m ergibt.

Pythagoras hat die zwei Befreundeten Zahlen 220 und 284 schon gekannt. Zählen wir alle positiven Teiler von 220 auf außer 220 selbst.

$$220 : 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 .$$

Summieren wir diese Teiler, so ergibt sich die Zahl 284.
Machen wir dasselbe mit 284, also

$$284 : 1 + 2 + 4 + 71 + 142 ,$$

so ergibt sich die Zahl 220.

Die Summe der Teiler einer Befreundeten Zahl ergibt also jeweils die andere Zahl. Verwenden wir für die Summe aller positiven echt kleineren Teiler einer Zahl n das Symbol $S(n)$, so können wir sagen $S(220) = 284$ und $S(284) = 220$, abstrahiert $S(a) = b, S(b) = a$, für Befreundete Zahlen a und b. Daraus folgt, daß $S(S(n)) = S^2(n) = n$ für jede Befreundete Zahl n gilt.

Wegen ihrer Teilbarkeitsvorschrift stehen die Befreundeten Zahlen natürlich in einem gewissen Zusammenhang mit den Vollkommenen Zahlen, sie sind sozusagen eine Art Abspaltung. Die Befreundeten Zahlen stehen mit den Vollkommenen Zahlen in folgendem Zusammenhang: Natürlich ist jede Vollkommene Zahl n mit sich selbst befreundet. Denn setzt man n für a und b in S ein, so erhält man $S(n) = n$ und $S(n) = n$, was obige Bedingung für $S(a) = b$ und $S(b) = a$ erfüllt. Ebenso gilt $S(n) = n \rightarrow S(S(n)) = n$. Weniger als 1200 solche Befreundete Zahlen sind bis 1980 bekannt. Euler hat 1750 davon 59 entdeckt. Einige Paare von Befreundeten Zahlen seien aufgeschrieben:

220	1184	2620	5020	6232	10744	17296	9363584
284	1210	2924	5564	6362	10856	18416	9437056

Doch gibt es nicht nur Paare von Befreundeten Zahlen, sondern auch Ketten, wie zum Beispiel diese Fünfer-Kette:

$$12496, 14288, 15472, 14536, 14264.$$

Hier ergibt die Teilersumme der ersten Zahl die zweite Zahl, deren Teilersumme die dritte usw. und die Teilersumme des letzten Gliedes ergibt wiederum die erste Zahl.

$$n = 12496 \text{ (als Startglied)}$$
$$S(n) = 14288$$
$$S(S(n)) = S^2(n) = 15472$$
$$\ldots$$
$$S^5(n) = n = 12496$$

Eine berühmte Kette von 28 befreundeten Zahlen hat $n = 14316$ als Startzahl und es gilt $S^{28}(14316) = 14316$, d.h. nach 28 Gliedern endet die Kette wieder bei der Startzahl. Als eine Misch-Struktur von Teilbarkeit und Ungerad- bzw. Geradzahligkeit erscheint uns nun die schon besprochene Goldbachsche Vermutung, daß jede gerade Zahl, größer als 2, als Summe zweier Primzahlen darstellbar ist.

Wenn eine Zahl teilbar ist und die Summe aller ihrer möglichen Teiler wiederum die Zahl ergibt, so ist das schon eine recht ansehnliche Sache. Wegen dieser perfekten Teilbarkeit nennt man diese Zahlen auch vollkommene Zahlen. Das Perplexe an diesen perfekten Zahlen ist aber, daß ihre vollkommene Teilbarkeit auf vertrackte Weise auf perfekt unteilbaren Zahlen, den Primzahlen, aufgebaut ist. Wie schon früher angemerkt wurde, ist die allgemeine Struktur der geraden vollkommenen Zahlen V: $V = 2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$. Aber nur wenn $2^n - 1$ eine Primzahl ist, also nicht teilbar, liefert die Struktur $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ eine vollkommene Zahl. Das ist wirklich der Gipfel einer Art Vollkommenheit - die gegenseitige Abhängigkeit von Teilbarkeit und Nichtteilbarkeit. Dieses Prinzip des gegenseitigen Bedingens gilt auch für die geraden und ungeraden Zahlen. Denn die vollkommenen Zahlen sind gerade und die Primzahlen, welche für deren Definition benötigt werden, sind ungerade Zahlen.

Die numerische Sensibilität

Eine numerische Sensibilität nimmt die Zahlenverhältnisse und deren Eigenschaften als Modelle für andere Verhältnisse in der Welt (vom Bilderrahmen bis zur Architektur). Die numerische Sensibilität sucht den numerischen Code hinter allen Dingen: Die Zahl als Maß aller Dinge, wie es Pythagoras formulierte. Die Fragmente des Philolaos: B1 "Die Natur aber ward in der Weltordnung aus grenzenlosen und grenzenbildenden Stücken

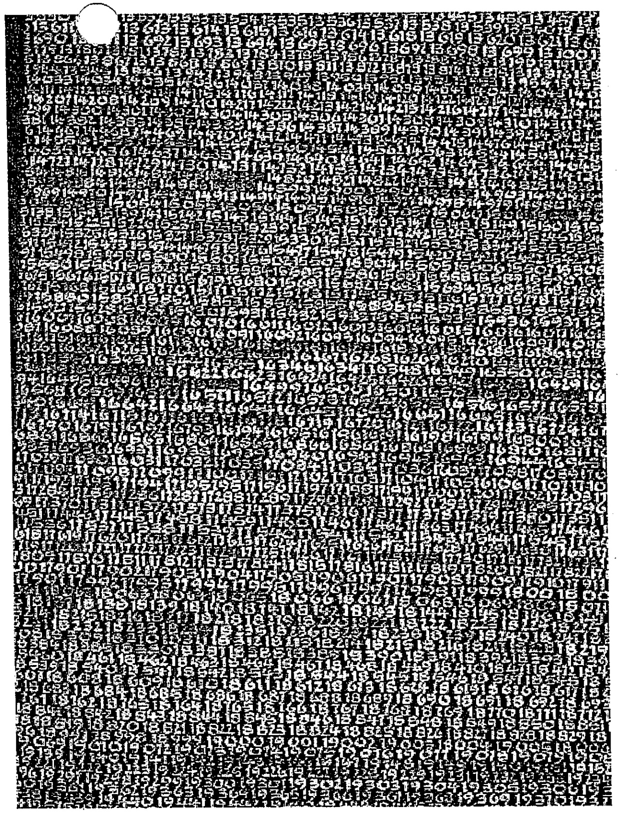

Abbildung 1.7. Roman Opalka, 1-∞ (Detail), 1965

zusammengefügt, sowohl die Weltordnung als Ganzes wie alle in ihr vorhandenen Dinge. " B4 "Und in der Tat hat alles, was man erkennen kann, Zahl." B11 "Denn nichts von den Dingen wäre irgendeinem klar, weder in ihrem Verhältnis zu sich, noch zueinander, wenn die Zahl nicht wäre und ihr Wesen." Die Pythagoräer behaupteten, "das Wesen aller Dinge sei Zahl" (Aristoteles). Die Einheit war für die Pythagoräer sowohl gerade wie ungerade, sie leitete sich aus dem Begrenzten und Unbegrenzten her. Laut Aristoteles nahmen die Pythagoräer an, das Unendliche sei identisch mit dem Geraden. Denn dieses gewähre für sich abgeteilt und von dem Ungeraden begrenzt den Dingen die Unendlichkeit. Die Pythagoräer haben auch die "figurierte Zahl" eingeführt. Sie stellten Zahlen durch die Anordnung von Steinchen her. Sie legten Figuren mit Steinchen (Dreiecke, Quadrate), welche Zahlen darstellten. Die Pythagoräer kannten auch schon die Proportionslehre. Archytas (B2): "Es gibt aber drei mittlere Proportionalen in der Musik: erstens die arithmetische, zweitens die geometrische, drittens die harmonische". Auch die Ägypter wußten schon über Proportionen Bescheid.

Das Wesen von All und Nichts wird also durch den numerischen Code bestimmt. Auch der genetische Code unterliegt dem numerischen.

Vermehrung und Vererbung gehorchen dem numerischen Code ("Die Zahlen vermehren sich wie die Tiere"; Merz). Fibonacci ist also ein Abkömmling von Pythagoras, dessen Schule ja gerade in Süditalien und Sizilien eine große Anhängerschaft gefunden hatte.

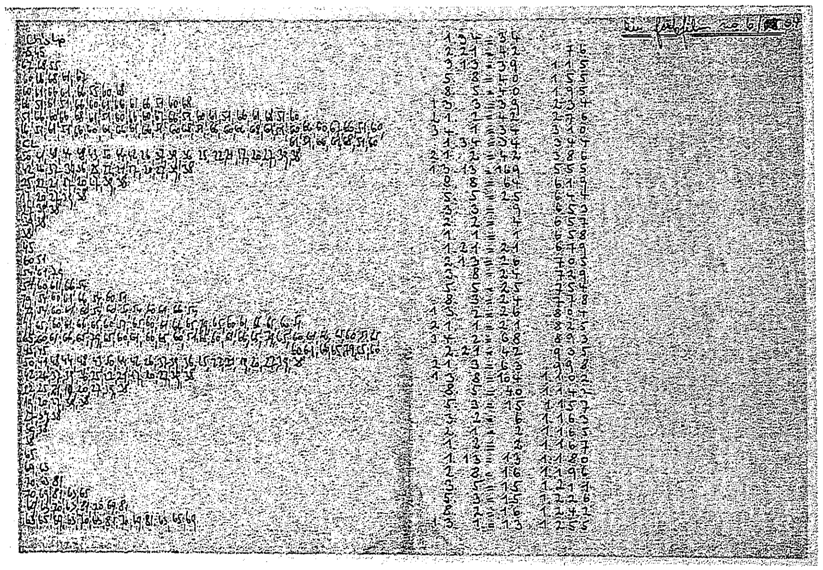

Abbildung 1.8. Kurt Kren, Mama und Papa, Kaderplan, 6/64

Der numerischen Sensibilität dienen also Zahlenverhältnisse als Modelle für andere Verhältnisse der Welt. Zahlenverhältnisse als

1. Hilfsmittel für die Konstruktion eines Werkes, Erklärung.

2. Verhältnis von Zahl und Natur, Naturphänomene als Zahlenphänomene. Die Zahl als Maßsystem der Natur. Zahlgesetze als Weltgesetze, Bewegung der Planeten etc.

3. Parallelen zwischen Zahlen und anderen Wesenheiten wie Farben, Worte.

4. Manifestationen physikalischer, biologischer, sozialer und physiologischer Grundsätze, die für Harmonie, Ordnung etc. sorgen.

5. Offenbarungen geheimer Zusammenhänge (Cryptanalysis, Wortzahlenmystik im Neuen Testament, Numerologie).

Die Fibonacci-Zahlen

Lenardo von Pisa, Sohn (= filius) des Bonacci, deshalb auch Fibonacci genannt, wollte in seinem Werk "Liber Abacci" von 1202 das arithmetische und algebraische Wissen seiner Zeit zusammenfassen, wodurch übrigens die arabischen Zahlen in Europa bekannt wurden. Auf einer dieser Seiten steht die kuriose Aufgabe: Wieviel Kaninchenpaare werden im Laufe eines Jahres, von einem einzigen Paar ausgehend, gezeugt? Unter der Voraussetzung, daß jedes Paar monatlich ein neues Paar wirft und daß die Kaninchen vom zweiten Monat an gebärfähig sind, gelangte er für die einzelnen Monate zu folgenden Zahlen: $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$. Diese Zahlenreihe, wo jede Zahl (nach der zweiten) als die Summe ihrer zwei Vorgänger definiert wird, nennt man Fibonacci-Reihe.

$$f_1 = f_2 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \ (n \text{ größer als } 2)$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots.$$

Die Fibonaccizahlen stehen also in einem arithmetischen Verhältnis, da die Differenz zweier aufeinanderfolgender Zahlen (ähnlich wie bei der arithmetischen Reihe $a - b = b - c$) die Struktur der Fibonacci-Reihe bestimmt, wenngleich sie nicht wie bei der arithmetischen Reihe konstant ist. Um Mißverständnisse zu vermeiden, möchte ich hier anmerken, daß ich in diesem Aufsatz die Begriffe Folge und Reihe synonym verwende. In der formalen Mathematik bezeichnet man in der Regel nur eine Folge von Teilsummen als Reihe.

Die Fibonacci-Reihe hat u.a. folgende Eigenschaften: Jedes Glied der Reihe (ab dem dritten) ist das arithmetische Mittel aus seinem Nachfolger und dem Vorläufer seines Vorläufers. Die Differenz zweier Glieder dieser Folge, die ein Mittelglied einschließen, ist gleich diesem Mittelglied. Eine der schönsten der elementaren Eigenschaften dieser Folge ist, daß sie ihre eigene

Differenzfolge ist: Bildet man die Differenzen $b_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ aufeinanderfolgender Glieder der Folge (a_n), so entsteht wieder die Folge (a_n) selbst, wenn auch leicht verschoben.

Wir haben die Fibonacci-Reihe einfach durch die Werte ihrer Vorläufer definiert. Wenn wir aber einen allgemeingültigen Ausdruck für diese Glieder haben wollen, kommen wir zu dieser komplizierten Formel:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\frac{1}{2}[1+\sqrt{5}])^{n+1} - (\frac{1}{2}[1-\sqrt{5}])^{n+1} \right]$$

Das Bestürzende an dieser Formel ist die Tatsache, daß die natürliche Zahl a_n durch einen Ausdruck definiert wird, in dem die Irrationalzahl $\sqrt{5}$ eine wesentliche Rolle spielt. Dies wird noch besonders deutlich, wenn wir setzen

$$c_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

Dann können wir mit Hilfe voriger Formel feststellen, daß sich c_n mit wachsendem n dem Wert $g = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ annähert.

Die Zahl g charakterisiert aber den Goldenen Schnitt. Dieses Verhältnis zeigt sich auch beim Pentagramm oder Drudenfuß. Ein "goldenes" Rechteck ist eines, dessen Seiten sich wie $1 : g$ verhalten.

Besonders interessant für die numerische Sensibilität macht die Fibonaccizahlen ihr exponentielles Wachstum. Sie sind gleichsam "figurierte Zahlen" des Wachstums. Es gehört zur innersten mathematischen Eigenschaft der Fibonaccizahlen, daß sie exponentiell, d.h. rasch wachsen. Es wäre interessant, mathematisch mit Julia Robinson zu zeigen, daß alle rekursive Folgen diophantisch definierbar sind, wenn es eine solche Folge mit exponentiellem Wachstum gibt, das ist eben die Fibonacci-Reihe. Deswegen hat ja Fibonacci angenommen, mit dieser Zahlenreihe hätte er das Muster des natürlichen Wachstums entdeckt, vom Wachsen der Pflanzen bis zum Wachsen der Hasen. Die Fibonacci-Reihe als numerisches Modell der Evolution.

Bei der Blattanordnung mancher Pflanzen, der Phyllotaxis, spielen die Fibonaccizahlen eine Rolle. Beim Übergang von einem zum nächsten Blatt tritt oft eine Schraubung auf, die zum Beispiel eine halbe Drehung enthält. Das Arrangement der Blätter kann also als Bruch definiert werden:

$$\frac{\text{Zahl der vollendeten Drehungen}}{\text{Zahl der Blätter pro Zyklus}}$$

Man spricht dann von $\frac{1}{2}$ Phyllotaxis (Ulme, Linde). Es treten aber auch die Werte $\frac{1}{3}$ (Buche, Haselstrauch), $\frac{2}{5}$ (Eiche, Aprikose), $\frac{3}{8}$ (Pappel, Birne),

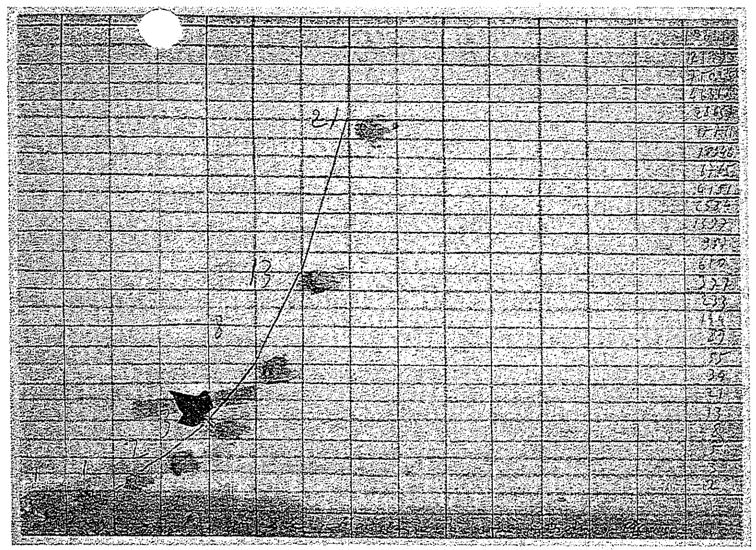

Abbildung 1.9. Mario Merz, la verticalitá sono assiomi in crescita, 1979

$\frac{1}{13}$ (Weide, Mandel), auf. Diese Phyllotaxis-Brüche bestehen stets aus Zahlen der Fibonacci-Reihe. Gerade diese Phyllotaxis ist eines der häufigsten ikonographischen Motive bei bildenden Künstlern neben der Spirale, oder eine propellerartige Mischung von Phyllotaxis und Spirale. Die Fibonacci-Zahlen eignen sich eben besonders zur Darstellung des Wachstums und des Lebens; sie sind eine Frühform von formalen Produktionssystemen. Nicht nur über die Phyllotaxis ist das erfaßbar, sondern auch über die Spirale. Denn bei der Ananas zum Beispiel finden wir Arrangements aufsteigender Spiralen als Ergebnis der Phyllotaxis. Spirale und Phyllotaxis sind also schon in der Natur verbunden.

Von den vielen Eigenschaften und Paradoxien der Fibonacci-Folgen seien jedoch besonders jene untersucht, die sie mit dem Goldenen Schnitt in Beziehung bringen.[3]

Die Überzeugung der Pythagoräer war es, daß jedes Ding und jeder Begriff in der Welt durch eine Zahl gekennzeichnet werden kann (Philolaos von Kroton: "Und wirklich hat alles, was erkannt wird, Zahl. Denn es ist unmöglich, daß ohne diese irgend etwas im Denken erfaßt oder erkannt wird".) Die gegenseitigen Beziehungen der Dinge sind durch das Verhältnis der ihnen zugeschriebenen ganzen Zahlen ausdrückbar. Das griechische

Wort logos für Verhältnis heißt im lateinischen ratio. Daher nennen wir die Verhältnisse ganzer Zahlen rationale Zahlen, sie umfassen die ganzen Zahlen ($5 : 1 = 5$) und die gewöhnlichen Brüche ($1 : 2 = 1/2$). Diese schreiben wir mit einer ganzen Zahl als Zähler über und einer ganzen Zahl als Nenner unter den Bruchstrich: zum Beispiel $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{2}$ usw. Da man die ganzen Zahlen als Verhältnis schreiben kann, gehören auch sie zu den rationalen Zahlen wie die Brüche. Der Pythagoräismus war der erste Ausdruck der numerischen Sensibilität.

Das Pentagramm und der Goldene Schnitt

Doch ausgerechnet das Geheimabzeichen der Pythagoräer, der regelmäßige Fünfstern aus fünf Linien, das Pentagramm, das Geheimabzeichen der Pythagoräer, brachte das pythagoräische Weltbild, daß man die Beziehungen sämtlicher Dinge durch das Verhältnis (den logos) ganzer Zahlen (arithmoi) beschreiben könne, zum Einsturz. Denn wenn wir das Verhältnis zwischen

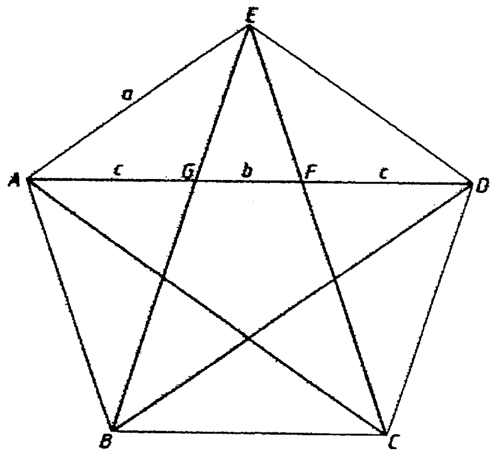

Abbildung 1.10. Pentagramm

einer Diagonale d des regelmäßigen Fünfecks (zum Beispiel die Linie von B nach E in Abb. 1.10) und seiner Seite s (zum Beispiel die Linie von A nach E in Abb. 1.10), das geometrisch einfach zu bestimmen war, versuchen numerisch darzustellen, dann verhält sich zwar $s : d$ ungefähr wie $3 : 5$ oder wie $5 : 8$ oder wie $13 : 21$, aber nicht genau. Die genannten Verhältnisse sind

bloß Näherungswerte für das tatsächliche geometrische Verhältnis. Beim Pentagramm lautet die Beziehungsgleichung zwischen Diagonale und Seite $d^2 = s^2 + d \cdot s$ oder $\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$.

Die Diagonale d verhält sich also zur Seite s wie die Seite s zur Differenz von Diagonale und Seite ($d - s$). Diese Verhältnisse müßten nach pythagoräischer Lehre rational sein und d und s folglich ganze Zahlen. Wenn wir uns nun fragen, welche Zahlenfolgen kommen am ehesten für diese Beziehungsgleichung in Frage, so kommen wir wieder auf die Fibonaccizahlen. Man kann nämlich die Fibonaccizahlen paarweise in Brüche aus aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen verwandeln: $1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13$, usw. Wenn wir nun diese Brüche in Dezimalzahlen verwandeln, kommen wir zu folgenden Werten (bei drei Dezimalstellen):

$1 : 2$	$0,500$
$2 : 3$	$0,667$
$3 : 5$	$0,600$
$5 : 8$	$0,625$
$8 : 13$	$0,615$
$13 : 21$	$0,571$
$21 : 34$	$0,618$
$34 : 55$	$0,618$

Wir sehen, die Brüche der Fibonaccizahlen streben einem Grenzwert zu: $0,618\ldots$ Wir können aber auch andere Brüche aus Paaren von Fibonaccizahlen herstellen, indem wir den Kehrwert von den ersteren bilden und diesen dann ebenfalls in eine 3-stellige Dezimalzahl verwandeln:

$\frac{1}{1} = 1.000$	$\frac{13}{8} = 1.625$
	$\frac{21}{13} = 1.615$
	$\frac{34}{21} = 1.619$
$\frac{2}{1} = 2.000$	$\frac{55}{34} = 1.618$
$\frac{3}{2} = 1.500$	$\frac{89}{55} = 1.618$
$\frac{5}{3} = 1.667$	$\frac{144}{89} = 1.618$
$\frac{8}{5} = 1.600$	$\frac{233}{144} = 1.618$

Hierbei sind also zunächst die Zähler und dann die Nenner fortschreitende Fibonaccizahlen. Auch diese rationalen Brüche oder ganzzahligen

Verhältnisse streben einem Grenzwert zu: 1.618 …, dem sie immer näher kommen. 5-stellig lautet er 1.61803 … und ist mit einem anderen berühmten Bruch identisch, den wir erhalten, wenn wir eine beliebige Strecke der Länge $x + y$ so in zwei Teile teilen, daß das Verhältnis der ganzen Strecke $(x+y)$ zur größeren Strecke x das gleiche ist wie das Verhältnis der größeren Strecke x zur kleineren Strecke y.

Dieses Verhältnis nennen wir den Goldenen Schnitt:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} .$$

Ausmultipliziert ergibt das $x^2 = xy + y^2$ oder $x^2 - xy - y^2 = 0$, oder $(x - y/2)^2 = \frac{5y^2}{4}$, welches das Verhältnis

$$\frac{x}{y} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$$

liefert. Es ist $\frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1.61803\ldots$, also die gleiche Zahl wie der Grenzwert von Brüchen von Zahlen aus der Fibonacci-Reihe.

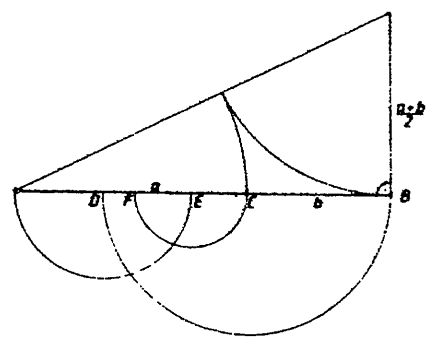

Abbildung 1.11. Geometrische Konstruktion des Goldenen Schnitts

Die "heilige Verhältniszahl" des Goldenen Schnitts ist übrigens die einzige Zahl, die ganz einfach in ihre reziproke Zahl verwandelt werden kann, indem man 1 abzieht: $x - 1 = \frac{1}{x}$. Daraus erhält man $x^2 - x - 1 = 0$, also obige Gleichung mit $y = 1$ eingesetzt, was $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ als Lösung hat. Es ist also

$$\frac{(1+\sqrt{5})}{2} - 1 = \frac{2}{(1+\sqrt{5})} .$$

Die irrationale Zahl 1.61803 … hat für einige Verwirrung in der Literatur gesorgt und zu Verwechslungen von Fibonacci-Reihe, Goldener Schnitt und Harmonikalität gesorgt, die zwar in Beziehung zueinander stehen, aber nicht dasselbe sind. Sie alle haben mehr oder minder mit der pythagoräischen Tradition zu tun, deswegen wollen wir sie etwas genauer untersuchen und differenzieren.

Die Verhältniszahl des Goldenen Schnitts als Harmoniegesetz hat in der klassischen Kunst, von Dürer über Raffael zu Tizian, eine bekannt große Rolle gespielt. Dem Goldenen Schnitt GS als Maß in der Kunst entspricht auch ein GS als Maßverhältnis in der Natur.

"Sehr oft läßt sich an Blättern und Blüten das Maßverhältnis des Goldenen Schnitts nachweisen, so beim Blatt des Goldregens, der Alpengänsedistel, der Maiblume usw. Das Schneeglöckchen ordnet seine Blütenblätter im gleichseitigen Dreieck an, während uns die Blüten der verschiedenen Lilienarten das zum Sechsstern verdoppelte gleichseitige Dreieck zeigen. Außerdem dürfte bekannt sein, daß die Bienenwabe aus vielen nebeneinander gefügten reinen Sechsecken gebildet wird.

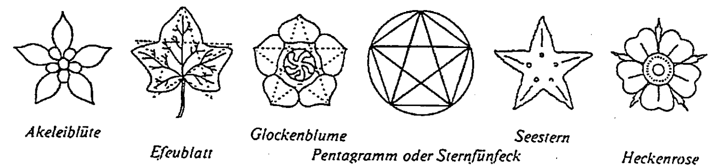

Abbildung 1.12. Proportionsverhältnis bei Pflanzen und Meerestieren

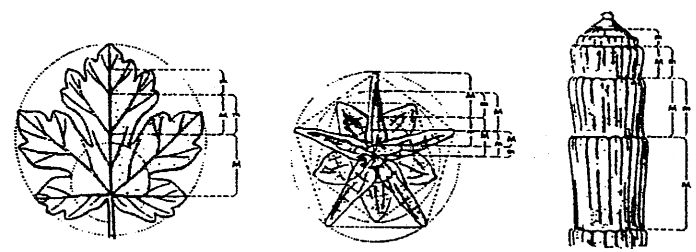

Abbildung 1.13. Goldene-Schnitt-Proportionen bei Pfanzen, von links Hahnenfuß, Seidenpflanze, Schachtelhalm

Auch das Quadrat läßt sich als Grundform vielfach in der Natur nachweisen: so treffen wir es in der Verdoppelung als Achtstern bei den Kreuzblütlern, bei Männertreu und Wiesenschaumkraut, und als Achteck in seltener Regelmäßigkeit bei der Einbeere; einem staudigen Liliengewächs. Dagegen bildet die ungefüllte Blüte der Dahlie einen achtstrahligen Stern. Noch häufiger begegnet uns aber das Fünfeck und das Sternfünfeck oder Pentagramm, eine Figur, der Jahrtausende hindurch geheimnisvolle Bedeutung beigemessen wurde. In der Pflanzenwelt treffen wir diese Form am klarsten in der Akeleiblüte, in der Tierwelt beim Seestern an. Zahlreiche andere Blüten, wie die Glockenblume, die Nelke, die Heckenrose, die Lindenblüte, der Phlox und andere zeigen diese Grundform, ebenso wie verschiedene Blätter, etwa das Himbeerblatt. Ziehen wir beispielsweise die Pentagrammform über ein Efeublatt, so stellen wir bei aller Unregelmäßigkeit, die dieses Blatt sonst aufweist, fest, daß die Grundverwandtschaft mit der Fünfecksform besteht. Es scheint, als bemühe sich die Natur, der idealen mathematischen Grundform so nahe wie möglich zu kommen. Die Abbildungen verdeutlichen dies.

Gerade der Fünfstern, also das bereits erwähnte Pentagramm, hat für unsere weiteren Betrachtungen besondere Bedeutung, teilen sich doch die Pentagrammseiten 'stetig' im Goldenen Schnitt, dem wir in der Natur auch beim Wachstum der Pflanze, bei einem edel gebauten menschlichen Körper oder den Abmessungen eines Pferdekörpers begegnen. So führt das stetig fortschreitende Wachstum der Pflanze, wie es der kleine Pappelzweig zeigt, häufig zu einer stetigen Teilung, wenn auch das ungeschulte Auge oft keine Regel erkennen kann. Die Strecken zwischen den einzelnen Knotenpunkten stehen sehr schön im 'Goldenen Verhältnis', das auch bei weiterem Längenwachstum beibehalten wird." [Hangenmaier, 1977].

Die harmonikalen Proportionen und der pythagoräische Traum

Die Harmonik geht auf Pythagoras zurück. Ihre Lehre ist, daß nicht nur unser Ohr ganzzahlige Intervallproportionen bevorzugt - die Pythagoräer glaubten ja daran, daß die ganze Welt durch das Verhältnis (logos) ganzer Zahlen beschrieben werden kann -, sondern daß diese Intervalle der Musik auch Naturgesetze sind, siehe Johannes Keplers "Weltharmonik". Die 12 musikalischen Hauptintervalle entstehen durch die Teilungen einer Saite nach ganzzahligen Verhältnissen. Schwingt eine Saite (einer beliebigen Länge), erhalten wir den Grundton, die Tonika. Vibriert nur mehr die Hälfte, besteht also das Verhältnis 1:2, steigt der Ton und wir erhalten die Oktave. Das Verhältnis der Saitenlängen, die schwingen, zu denen, die nicht

schwingen, kann auch als Verhältnis von Wellenlängen und von Frequenzen aufgefaßt werden. Wo immer aber die gleiche Proportion zwischen schwingendem und ruhigem Saitenabschnitt vorhanden ist, erklingt das gleiche Intervall. Die weiteren Proportionen der 12 Hauptintervalle sind

2:3	Quinte (der Ton steigt um ein Fünftel)	5:9	kleine Septime
3:4	Quarte	8:9	große Sekunde
3:5	große Sexte	8:15	große Septime
4:5	große Terz	15:16	kleine Sekunde
5:6	kleine Terz	32:45	Tritonus
5:8	kleine Sexte		

Für die traditionelle Musiktheorie gelten die Intervalle bis zur kleinen Sexte als Konsonanzen, der Rest als Dissonanzen.

In harmonischer Proportion befinden sich die 3 Zahlen a, b und c in folgender Proportion:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \text{ oder } \frac{c}{a} = \frac{c-b}{b-a}$$

Man nehme zum Beispiel für a, b und c : 2,3 und 6. Gerade die Folge der Konsonanzen hat Glieder: $1:2, 2:3, 3:5, 5:8$; (Oktave, Quinte, große Sexte, kleine Sexte), die mit den ersten Gliedern der Fibonacci-Reihe, als Brüche definiert, übereinstimmen: $1/2, 2/3, 3/5, 5/8 \ldots$ bzw. $2/1, 3/2, 5/3, 8/5 \ldots$. Und gerade diese rationalen Brüche oder ganzzahligen Verhältnisse bzw. Proportionen kommen dem tatsächlichen geometrischen Verhältnis zwischen Diagonale d und Seite s im Pentagramm immer näher, und zwar je dichter das Proportionsintervall, desto genauer. Die Beziehungsgleichung zwischen Diagonale d und Seite s lautet ja beim Pentagramm: $d^2 = s^2 + d \cdot s$. Demgemäß gilt $d : s = s : (d - s)$. d soll sich zu s wie s zur Differenz von $d - s$ verhalten.

Dieses Verhältnis müßte nach pythagoräischer Lehre rational sein, daher d und s ganzzahlig. Versuchen wir nun, diese Forderung zu erfüllen, und dieses (geometrische) Verhältnis von d und s mit Zahlen zu besetzen, so sehen wir, daß dies mit Paaren aus der Fibonacci-Reihe oder Harmonik am besten gelingt.

d	1 2 3 5 8 13 21
s	1 1 2 3 5 8 13
$d - s$	0 1 1 2 3 5 8

$\frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$ kann man ja transformieren in $d(d-s) = s \cdot s$.

Wenn wir nun die obigen Zahlen in diese Gleichung einsetzen, müßten bei $d(d-s)$ und $s \cdot s$ die gleichen Summen herauskommen:

$$\begin{array}{ll} d(d-s)\ldots & 0\ 2\ 3\ 10\ 24\ 65\ 168 \\ s \cdot s = s^2 \ldots & 1\ 1\ 4\ \ 9\ 25\ 64\ 169 \end{array}$$

Es klappt nur fast, denn wenn wir die untereinanderstehenden Zahlen dieser Zeilen vergleichen, sehen wir, daß der Unterschied immer geringer wird, je größer die Zahlen werden. Dennoch wird man nie zwei Zahlen finden, seien sie noch so groß, für welche $d(d-s)$ exakt gleich $s \cdot s (= s^2)$ ist.

Was war nun diese Beziehung von Diagonale d und Seite s im Pentagramm eigentlich? Wenn wir d als ganze Strecke x plus y nehmen, und s als die größere Strecke, dann ergibt die Differenz $d - s = (x+y) - x$ also die kleinere Strecke y . Wenn sich nun $d : s$ wie $(x+y) : x$ verhalten soll, dann verhält sich auch $s : (d-s)$ wie $x : y$. Das bedeutet aber: $d : s = s : (d-s)$ beschreibt die gleiche Proportion wie $(x+y) : x = x : y$. Das Verhältnis $d : s = s : (d-s)$ des Pentagramms hieß bis zum Mittelalter "proportio divina" und seit der Renaissance Goldener Schnitt.

Diese Proportion war zwar durch die Fibonaccizahlen am annäherndsten mit Hilfe ganzer Zahlen zu errechnen - wie es der Pythagoräische Traum vorschrieb -, aber wie wir gesehen haben, nie exakt. Es blieb immer ein Rest. Dieser bedeutet, daß Diagonale und Seite eines Pentagramms in ihrem Verhältnis nicht durch zwei ganze Zahlen, als rationaler Bruch, darstellbar sind, daß also d und s kein gemeinsames Maß haben, also inkommensurabel sind. Das Verhältnis der größeren Strecke x (Major) zur kleineren Strecke y (Minor) des Goldenen Schnitts tendiert zwar wie die Brüche aus aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen einem Grenzwert zu, nämlich $\frac{x}{y} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1.61803\ldots$, doch ist dies wegen $\sqrt{5}$ ein irrationaler Bruch.

In der Praxis wäre diese Inkommensurabilität, Unmeßbarkeit, durch ein Fortsetzen der Fibonacci-Reihe zu immer größeren Zahlen vernachlässigbar und das Verhältnis von $d : s$ bzw. $x : y$ mit gewünschter Genauigkeit erreichbar gewesen, doch theoretisch nicht mehr. So zerbrach der Pythagoräische Traum und der Begriff der Inkommensurabilität tauchte auf. Für den Hauptwert des Goldenen Schnitts (0,618), den Major, kannte man bereits seit der Antike als Annäherungslösung die harmonikale Proportion 5:8 (=0,625), die nur um 0,007 von ihm abweicht. Wahrscheinlich hat man aus praktischen Gründen immer mit solchen Annäherungswerten gearbeitet, die man aus der Harmonik oder der Fibonacci-Reihe nahm.

Man kann mit Quadraten von den Seitenlängen $1, 2, 3, 5, 8, 13\ldots$ (also Fibonaccizahlen) Rechtecke aufbauen, deren Seitenverhältnisse ständig besser dem des Goldenen Schnitts entsprechen. Die Fibonaccischen Zahlenverhältnisse nähern sich immer besser dem irrationalen Verhältnis $d : s$ an, so wie man aus jedem Rechteck, dessen Seitenlängen gleich Diagonale d und Seite s eines regelmäßigen Fünfecks sind, durch Abspaltung eines Quadrates ein dem vorigen ähnliches Rechteck bekommt - man aber an kein Ende kommt.

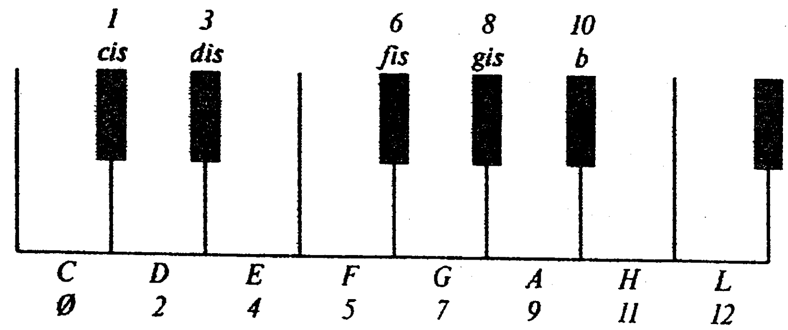

Abbildung 1.14. J. S. Bach, wohltemperiertes Klavier

Eine andere Annäherung an die harmonikalischen Proportionen hat J. S. Bach mit seinem wohltemperierten Klavier durchgeführt. Während die griechische Harmonielehre bzw. die Fibonacci-Reihe auf ganzen Zahlen und deren Verhältnis aufgebaut (also arithmetischer Natur) waren, konstruierte Bach eine geometrische Reihe (ähnlich der geometrischen Natur des Goldenen Schnitts) als Basis für seine Harmonik.[4] Wie bereits erwähnt, ist das Schwingungsverhältnis von Tonika zu Oktav 1:2.

Die 11 zwischen Tonika und Oktav liegenden Töne sollen sich nicht durch (verschiedene) ganzzahlige Verhältnisse ergeben (wie dies ein sehr guter Geigenvirtuose auszuführen vermag, indem er mit dem Bogen die Saiten in entsprechenden Proportionen zum Schwingen bringt), sondern alle in gleichem Verhältnis zueinander stehen. Das bedeutet für aufeinanderfolgende Töne x, y, z die Beziehung $x : y = y : z$ oder $y = \sqrt{x \cdot z}$ (geometrische Reihe). Damit das Verhältnis 1:2 zwischen Tonika und Oktav auch erhalten bleibt, wenn alle benachbarten Töne ein konstantes Schwingungsverhältnis haben, ist es notwendig, daß dieses gleich $1 : \sqrt[12]{2}$ ist. Von der Tonika zur Oktav kann man daher die einzelnen 12 Töne durch die folgende geometrische

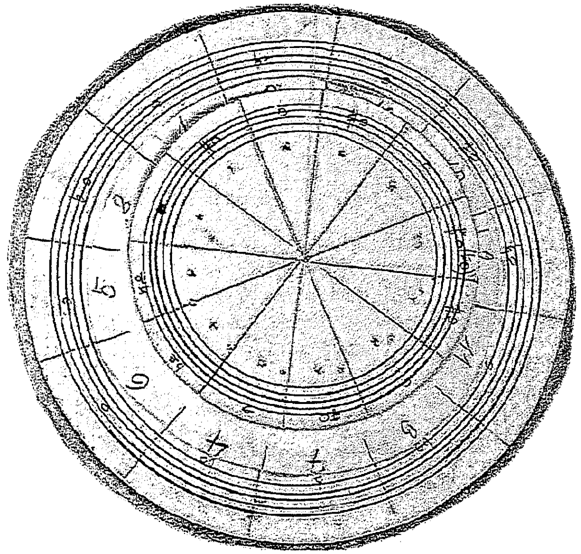

Abbildung 1.15. Arnold Schönberg, Zwölftondrehscheibe für "Bläserquintett op. 26", ©Arnold Schönberg Center, Wien

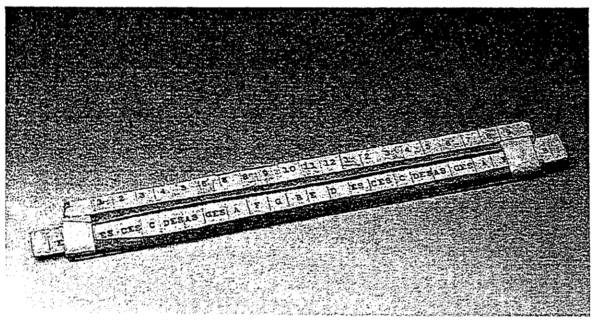

Abbildung 1.16. Arnold Schönberg, Zwölftonreihenschieber für "Serenade op. 24 (box 24)", ©Arnold Schönberg Center, Wien

Proportion genau festlegen: 1, $\sqrt[12]{2}$, $(\sqrt[12]{2})^2$, $(\sqrt[12]{2})^3$, $(\sqrt[12]{2})^4$, …, $(\sqrt[12]{2})^{11}$, 2 .

Aus dieser Gleichberechtigung aller Töne durch Glättung der arithmetischen Verhältnisse entwickelte sich die 12-Tonmusik Hauers und Schönbergs mit ihren eigenen Gesetzmäßigkeiten.

Wegen der Ungenauigkeit der Messungen kann das Vorkommen des Goldenen Schnitts in Wirklichkeit ein Beweis für harmonikalisches Bauen sein. Die Fibonacci-Reihe schlägt eine Brücke zwischen zwei unversöhnlichen Gegnern, dem Goldenen Schnitt, der Serie irrationaler Brüche, und der Harmonik, der Serie rationaler Brüche.

Desweiteren wurde die Apotheose des Goldenen Schnitts durch Luca Pacioli (1445-1514) in seinem Buch "Divina proportione" (mit Abbildungen von Leonardo da Vinci) unter dem Eindruck des religiösen Dogmas von der Trinität geführt, sodaß es durchaus wahrscheinlich ist, daß in Wahrheit bis dahin nach harmonikalischen Intervallproportionen gebaut worden war, was einfacher, meßbarer und rationaler (im doppelten Sinne des Wortes) war als mit den irrationalen, inkommensurablen, komplizierten Goldenen Schnitt-Zahlenverhältnissen. Oder man baute nach Fibonacci-Zahlen, deren Brüche ja auf einen Grenzwert zu tendieren, welcher der Major des Goldenen Schnitts $(0,618\ldots)$ ist. Die Fibonacci-Reihe schlägt also eine Brücke zwischen dem Goldenen Schnitt und der Harmonik: Der Major liegt nämlich den musikalischen harmonikalischen Konsonanzen in Gestalt der beiden Sexten (3:5, 5:8) am nächsten.

Harmonik, Goldener Schnitt und Fibonacci-Reihe berühren sich in vielen Punkten, stehen aber im Grunde jeder für sich, wenn nicht in Gegensatz zueinander. Sie bilden die bzw. kommen aus der ersten Grundlagenkrise der Mathematik. Wir haben gesehen, die Harmonik besteht aus ganzzahligen Intervallproportionen, welche wie die Fibonaccizahlen ein ganzzahliges Verhältnis zueinander haben, ein arithmetisches (arithmos bedeutet ganze Zahl) Verhältnis. Der Goldener Schnitt ist aus Strecken gebildet, die nicht exakt durch das Verhältnis zweier ganzer Zahlen ausgedrückt werden können, sie sind inkommensurabel, aber man kann sie zeichnen, sie haben ein geometrisches Verhältnis. Die Fibonacci-Reihe ist die Zahlenfolge, mit der man am besten die stetige geometrische Teilung des Goldenen Schnitts ganzzahlig darstellen kann (in ganzzahligen rationalen Brüchen).

Die Fibonaccizahlen kamen dem pythagoräischen Traum am nächsten. Denn das Verhältnis von Diagonale d und Seite s des Pentagramms, das in der Form $d : s = s : (d - s)$ als "göttliche Proportion" bzw. "Goldener Schnitt" bekannt ist, ist durch Fibonaccizahlen am annäherndsten zu errechnen, wenn auch nicht ganz. Denn wie die Brüche aus aufeinanderfolgenden Fibonaccizahlen strebt auch das Verhältnis der größeren Strecke zur kleineren Strecke des Goldenen Schnitts einem Grenzwert zu, nämlich

$$\frac{x}{y} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1.61803\ldots,$$

doch ist dies wegen $\sqrt{5}$ ein unendlicher irrationaler Bruch, was soviel heißt wie, daß eben der Goldener Schnitt nicht restlos durch rationale Brüche ganzer Zahlen beschreibbar ist, sondern ein unauflöslicher, wenn auch bei immer größeren Fibonaccizahlen immer kleiner werdender Rest bleibt – das Unendliche (welches die Punkte ... bedeuten).

Der Goldene Schnitt und die Harmonik sind gewissermaßen Gegner. Ein irrationaler Bruch ist ein Quotient von Zahlen, der (im allgemeinen im Zähler) mindestens eine Wurzel (aus einer positiven Zahl) enthält, sodaß er einen unendlichen nichtperiodischen Dezimalbruch ergibt. Ein rationaler Bruch ist ein Quotient zweier natürlicher (oder ganzer) Zahlen, was einen endlichen oder periodischen (in seiner Bauart also durch endlich viele Ziffern beschreibbaren) Dezimalbruch ergibt.

Der harmonikalische pythagoräische Traum geht davon aus, daß die Welt durch das Verhältnis ganzer Zahlen beschrieben werden kann. Da das griechische Wort für Verhältnis logos im Lateinischen ratio heißt, nennen wir die Verhältnisse ganzer Zahlen (arithmoi) rationale Zahlen. Sie bilden auch den Mythos für einen rationalen, logischen Aufbau der Welt. Doch aus der Zahl selbst, aus den Eigenschaften der arithmoi, den Verhältnissen ganzer Zahlen, wurde die Irrationalität geboren. Aus dem Schoße der Ratio, dem Zahlenverhältnis, entsprang die Irrationalität. Das Symbol des Maßes, die Zahl, gebar auch die Idee der Inkommensurabilität, des Nichtmeßbaren. Denn ausgerechnet das Geheimabzeichen der Pythagoräer, das Pentagramm, ließ sich nicht exakt ganzzahlig, rational darstellen. Wenn schon nicht einmal das Pentagramm als Verhältnis ganzer Zahlen beschrieben werden konnte, dann natürlich auch nicht die Welt. Die Pythagoräer trugen diesen Traum dennoch weiter, obwohl ihnen schon seit dem 5. Jahrhundert vor Christi der Begriff der Inkommensurabilität bekannt war: Der Beweis für die Unmöglichkeit, das Verhältnis der Quadratwurzel aus 2 zur Einheit in ganzen Zahlen auszudrücken, also der Unmöglichkeitsbeweis für die Beziehung $d^2 : s^2 = 2s^2 : d^2$. Die Seite s und die Diagonale d des Quadrates waren schon inkommensurabel. Die ungeheure Tragweite dieser Entdeckung der Inkommensurabilität und des Irrationalen aus dem Schoße des Maßes und der Ratio selbst hat nicht nur die griechische Mathematik erschüttert.[5]

Der neue pythagoräische Traum: das digitale Prinzip

Der neue pythagoräische Traum lautet: kann ein Computer die Welt perfekt simulieren? Nicht nur in der Antike, auch in der Neuzeit träumt man vom pythagoräischen Prinzip. Die Beschreibbarkeit der Welt durch ganze Zahlen steigerte sich mit dem Church-Turing Prinzip zum Ideal der effektiven Berechenbarkeit der Welt. David Deutsch definierte 1985 dieses Prinzip nach den Namen zweier Logiker: "Every finitely realizable physical system can be perfectly simulated by a universal model computing machine operating by finite means"[Deutsch, 1985].

George Boole (1815-1864) hat im 19. Jahrhundert in seinem Buch "Laws of Thought", der Begründung des Logikkalküls, diesem Traum die Grundlage geliefert, indem er die Grundlage für eine Verbindung von Zahl und Elektrizität lieferte. In diesem Buch steht der Satz "Die Bedeutung der Symbole 0 und 1 im System der Logik sind das Nichts und das All". Er folgt dabei der Spur des binären Zahlensystems von Leibniz, das darin besteht, alle Zahlen durch bloß zwei Ziffern $(0, 1)$ darzustellen. Die binäre Darstellung der Zahlen gehört zur Grundlage der digitalen Welt. Denn erst mit ihrer Hilfe kann man durch Elektrizität Zahlen darstellen, kann der Computer rechnen. Hat nämlich der Logiker Boole die Symbole 0 und 1 mit Nichts und All gleichgesetzt und darauf einen Logikkalkül, eine Netzalgebra etc. aufgebaut, so konnte der Ingenieur daraus Schaltungssysteme ableiten, indem er für das Symbol 1 Elektrizität und für das Symbol 0 Nicht-Elektrizität setzte. Floß Strom durch die Leitung hieß das 1, floß kein Strom durch die Leitung hieß das 0. Mit dieser sequentiellen Abfolge von Strom und Nichtstrom, von Elektrizität und Nichtelektrizität, von 1 und 0 konnte der Computer (eine elektrische Maschine) Zahlen darstellen und Rechenvorgänge ausführen. Die Darstellung digitaler Zahlen (das sind Zahlen, die nur durch zwei Ziffern ausgedrückt werden, nämlich 0 und 1) durch Elektrizität und Nicht-Elektrizität bildet die Basis für die elektronische Welt des Computers, für unsere elektronische, digitale Welt. Ein Dualismus, der sich aber zu etwas neuem verbindet (nämlich zwei Ziffern, die jeweils durch eine andere Anordnung eine andere Zahl darstellen), zeichnet das digitale Denken aus. Dieser binäre Code ist die neue Form der numerischen Sensibilität, der neue pythagoräische Traum: Elektronisierung der Welt. Zahl: Elektrizität: Digitalisierung der Welt. Die Zahl steckt also nicht nur hinter der Proliferation des Hasen, sondern steht auch in Zusammenhang mit der Elektrizität. Das digitale Prinzip ist also der neue pythagoräische Traum.

Der quantifizierende Geist, l'esprit de la géometric, hat bereits im 18. Jahrhundert einen ersten Höhepunkt erreicht. Nach 1900 erschienen mehrere Werke, die den "geometrischen Geist" bzw. das digitale Prinzip spezifisch auf das Wachstum von Formen lebender Organismen anwendeten. Theodore Andrea Cook publizierte 1903 "Spirals in Nature and Art" und 1914 "The Curves of Life", ein Werk, das ganz der Spirale (the most beautiful of curves" - A.R. Wallace) und ihrem geschichtsmächtigen Wirken in der Biologie, Botanik, Kosmologie, Architektur und visuellen Kunst gewidmet war [Cook, 1979]. Die endlose Kurve der Spirale vermittelte den Eindruck kontinuierlicher Bewegung.

Die Spirale oder die Helix ist ein Phänomen, das so oft in allen Formen des Wachstums, bei Pflanzen, bei Tieren, beim menschlichen Körper, vom Andromeda-Nebel bis zur DNA (Doppel Helix) beobachtet wurde, daß die Vermutung nahe liegt, sie läge allem Wachstum und damit allen Formen des Lebens zugrunde. Insbesondere die logarithmische Spirale ("Spira mirabilis" nannte sie Bernoulli 1691) wird als Manifestation jener Energie betrachtet, die beim Wachstum organischer Körper arbeitet. Cook ist sich allerdings klar, daß der Geometrisierung des Lebens ("to define a natural object in mathematical terms") Grenzen gesetzt sind und ebenso dem organischen Aspekt der logarithmischen Spirale ("a logarithmic spiral is as near as we can get in mathematics to an accurate definition of the living thing") [Cook, 1979].

In der Geschichte der Kunst sind allerdings in der Tat Spiralformen, besonders wegen ihres Aspektes der Symmetriebrechung und der Chiralität (Links- oder Rechts-Händigkeit), gerne als "Kurven des Lebens" zur Darstellung des Lebens benützt worden.

Das gnomonische Wachstum und die logarithmische Spirale

Die logarithmische Spirale und ihre Eigenschaft des gnomonischen Wachstums hat auch D'Arcy Thompson bei seinem Studium des Wachstums lebender Organismen fasziniert. In seinem Buch "On Growth and Form" (1914) hat er der "gleichwinkligen Spirale", wie Descartes und Roger Cotes die logarithmische Spirale nannten, ein eigenes Kapitel gewidmet. Was ihn bei der Spirale als Wachstumsform interessierte, war, daß das spiralige Gehäuse, wie auch das darin enthaltene Lebewesen, an Größe zunimmt, aber seine Form nicht verändert: "Die Existenz dieses konstanten Wachstumsverhältnisses oder dieser konstanten Formähnlichkeit ist das Wesentli-

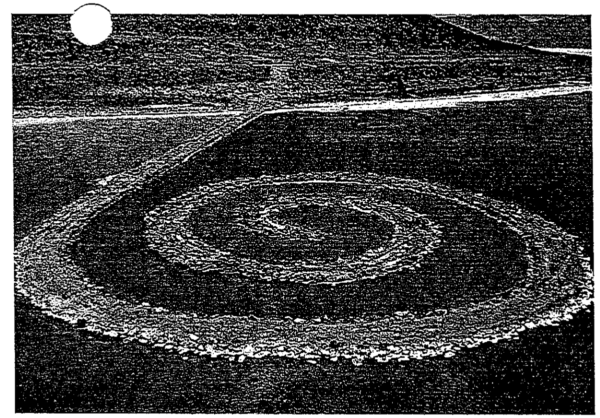

Abbildung 1.17. Robert Smithson, Spiral Jetty, Great Salk Lake, Utah, 1970

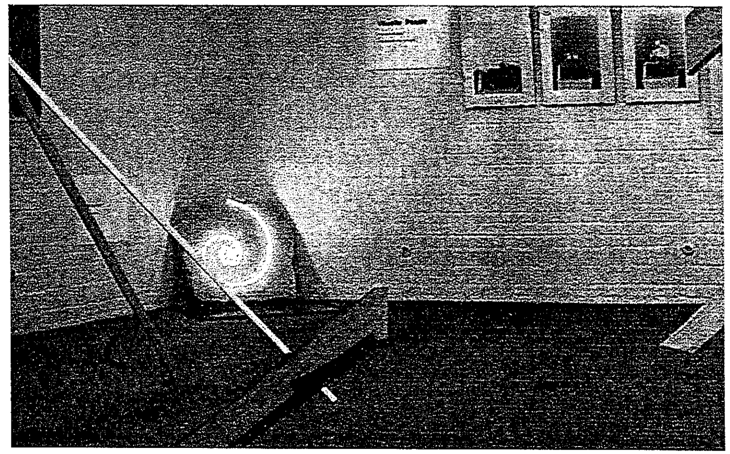

Abbildung 1.18. Peter Weibel, Eadem Mutata Resurgo, Pascal Spirale, 1975.

che bei der gleichwinkligen Spirale."[Thompson, 1966].

Darauf hatte schon Christian Wiener in den "Grundzügen der Weltordnung" (1863) hingewiesen. Jeder Zuwachs gleicht seinem Vorgänger. Das Wachstum geschieht durch symmetrische Ausdehnung und so bleibt seine Form unverändert bewahrt. Diese Eigenschaft kontinuierlicher Ähnlichkeit gibt es unter allen Kurven nur bei der gleichwinkligen bzw. logarithmischen Spirale. Daraus entsteht die gnomonische Eigenschaft der Spirale, nämlich beim Wachstum außer der Größe keine Veränderung zu erleiden: Formin-

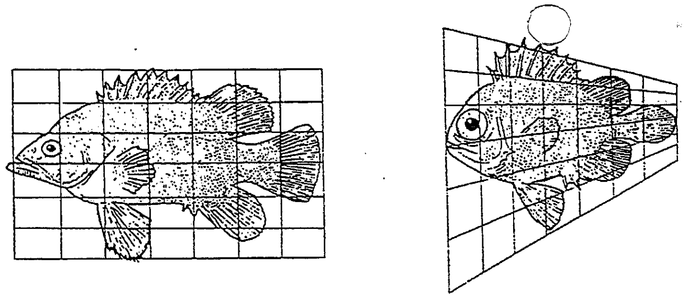

Abbildung 1.19. Links: Polyprion, rechts: Pseudopriacantus altus

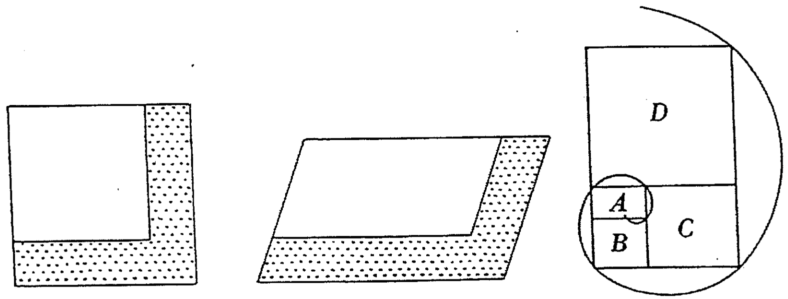

Abbildung 1.20. Gnomonische Figuren

varianz bei Skalierungsvarianz, vergleichbar den Fraktalen. Ein Gnomon ist eine Figur, die, wenn sie zu irgendeiner anderen Figur hinzugefügt wird, eine dem Original ähnliche Figur entstehen läßt. Symmetrisches Wachstum ist also gnomonisch, das heißt, "daß jeder folgende Zuwachs seinem Vorgänger ähnlich ist, und zwar ähnlich sowohl in Bezug auf die Vergrößerung wie auf die Anordnung."[Thompson, 1966].

Doch Thompson warnte vor der "mystischen Vorstellung", die Spirale selbst als Manifestation des Lebens zu sehen, da sie ja aus lebloser Substanz geformt wird. Thompson beharrte darauf, daß die Formen und Formveränderungen von Organismen, die durch Bewegung und Wachstum in Erscheinung treten, mit Hilfe physikalischer Methoden und Überlegungen, die mit mathematischen Gesetzen übereinstimmen müssen, erklärt werden können. Der Zustand und die Form eines Organismus wie auch die Veränderung dieses Zustandes bzw. der Form sind das Resul-

tat einer Anzahl Kräften und Energien: "Die Morphologie ist nicht nur ein Studium materieller Dinge und der Form der materiellen Dinge, sondern besitzt auch die dynamischen Aspekte, in deren Rahmen wir uns mit Hilfe von Kräftebegriffen mit der Deutung von Energievorgängen befassen."[Thompson, 1966].

Die Vorstellung einer dynamischen Symmetrie, die auf den Gesetzen der Thermodynamik aufgebaut ist, war also schon vorhanden (siehe auch Jay Hambridges "Dynamic Symmetry" von 1920). Für die Entwicklung, das Wachstum und die Veränderung von Formen führte Thompson selbst mathematische Modelle ein, die berühmten cartesischen Transformationen. Unter den Fischen entdecken wir eine große Mannigfaltigkeit von solchen Deformationen.

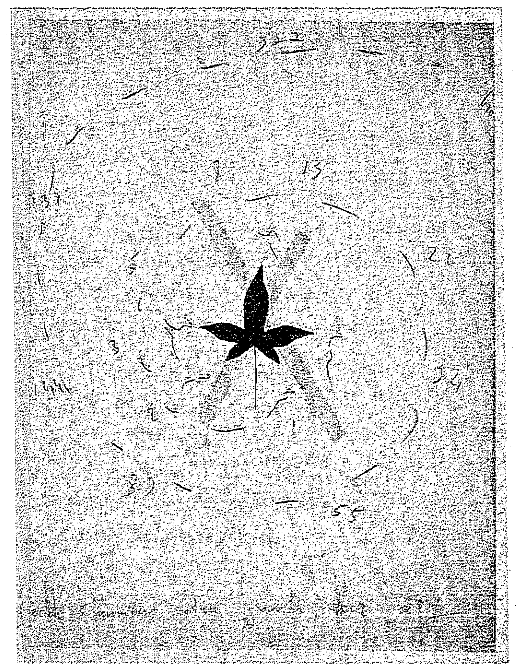

Abbildung 1.21. Mario Merz, each 5 numbers nature growth herself, 1979.

Thermodynamisch definierte Formen

Die mathematischen Aspekte und dynamischen Prinzipien der Morphologie, auf die Thompson hingewiesen hatte, verfolgte auch Matila Ghyka in

"The Geometry of Art and Life" (1946). Auch hier spielt die logarithmische Spirale eine Rolle. Ghyka verweist besonders auf die pentagonale Symmetrie als spezifisch für die vektorialen Pulsationen des Wachstums von lebenden Organismen. Er beruft sich dabei auf F.M. Jaegers "Lectures on the principle of symmetry and its applications in natural science" (1917). Aber diese Positionen, die Spiralen als Geometrie des Lebens selbst zu betrachten, sind schon von Thompson als "mystisch" widerlegt worden. Ghykas Verdienst ist es hingegen, thermodynamische Prinzipien zur Definition der Formen eingeführt zu haben. "The most general principle governing the states of equilibrium of physico-chemical systems is the 'Criterium of Dirichlet': in order that the equilibrium of a closed system should be stable it is sufficient that its potential energy should be (or should pass through) a minimum."[Ghyka, 1977] Alfred J. Lotka hat 1922 auf die Bedeutung der Energieproblematik für gestaltbildende Reaktionen hingewiesen (The Energetics of Evolution).

Fraktales Wachstum: Symmetrie und Selbstsimilarität

Benoit Mandelbrots Untersuchungen zur "fraktalen Geometrie der Natur" [Mandelbrot, 1983] die aus seinem Essay "Les objets fractals: forme, hasard et dimension" (1975) hervorgingen, haben ebenfalls zum Ziel, Irregularitäten und Singularitäten der Formbildung mathematisch zu beschreiben. Die "mathematischen Monster", die er Fraktale nannte, bilden einen Teil jener Geometrie des Wachstums, jener Formen in der Natur (Wolken, Berge, Wälder, Küsten), die besonders irregulär scheinen, doch in der Tat symmetrieähnlichen Gestaltprozessen unterliegen. Zum Beispiel könnte wegen der Identität der Irregularität in allen Skalierungen die fraktale Iteration des Sierpinski-Teppichs mit dem gnomonischen Wachstum der logarithmischen Spirale verglichen werden.

Fraktale Objekte entstehen durch sukzessive Einsetzungs- und Ersetzungsprozesse bzw. Umformungsregeln. In einen Initiator wird ein Generator eingesetzt, zum Beispiel in eine gerade Linie eine gebrochene Linie, wobei in die verbleibende gerade Linie der neuen Form wieder gebrochene Linien eingesetzt werden, also rekursiv vorgegangen wird. So entsteht eine weitere "Kurve des Lebens", die Schneeflockenkurve, 1905 von Koch vorgeschlagen.

Mit fraktalen Objekten erreicht der esprit de la géomètrie eine neue Nähe zum Wachstum der Natur, zum Beispiel zu den Pflanzen. Bäume und Pflanzen sind wegen ihrer rekursiven Verzweigungsstruktur bzw. wegen ihrer

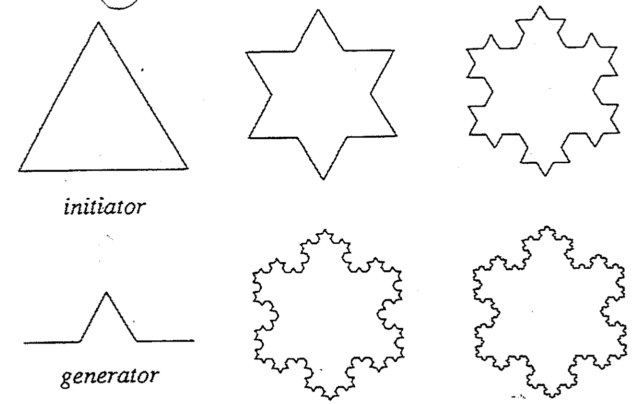

Abbildung 1.22. Schneeflockenkurve nach Koch

Bifurkation zum Teil als Fraktale darstellbar. Die fraktale Iteration, die rekursive Ersetzung gleicher Objekte, führt zu einer Struktur, wo alle Teile einer Gestalt eine geometrische Ähnlichkeit zum Ganzen haben. Diese Selbstsimilarität als Struktur zwischen den Teilen und dem Ganzen ist eine relevante Eigenschaft, wenn auch abstrahiert, von Pflanzen.

Fraktale können als vereinfachte abstrahierte Repräsentationen von realen Pflanzen betrachtet werden, wobei die rekursiven Entwicklungsmechanismen nicht mehr Symmetrie oder Spirale sind, sondern Selbstsimilarität und Entwicklungsalgorithmen. Symmetrie wird als Invarianz einer Konfiguration von Elementen gegenüber einer Gruppe von automorphen Transformationen definiert, welche Transformationen Kongruenzen sind, die durch Rotation, Reflexion und Translation erreicht werden. Könnte daher Selbstsimilarität als Spezialfall der Symmetrie unter Skalierungsoperationen betrachtet werden? Nein, aber wenn auch Selbstsimilarität schwächer ist als Symmetrie, ist Selbstsimilarität dennoch ein Paradigma für Strukturen in der natürlichen Welt, besonders in der Botanik.

Formale Grammatiken

Das rekursive Ersetzen eines Teils des Ausgangsobjektes durch (selbst)ähnliche Elemente kann auch als Umschreib- bzw. Umformungsprogramm definiert werden. Die fraktale Kurve einer Schneeflocke ist das Ergebnis einer Umschreibregel, wo rekursiv offene Polygone ersetzt werden. John Conways populäres "game of life" von 1970 ist ein Umschreibemechanismus, der sich auf Felder bezieht.

Der norwegische Mathematiker Axel Thue hat 1914 mit seiner Arbeit "Probleme über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Regeln" das erste Umformungs- bzw. Umschreibe-Programm geliefert, das über Buchstaben-Ketten operiert. Sein Problem war: Wie kann ich wissen, ob aus einem endlichen Alphabet X (zum Beispiel A, B, C, D, E, F) mit einigen Umformungsregeln der Gestalt $u \to v$ (zum Beispiel $ABA \to CA, DA \to D$) eine gegebene Zeichenkette ableitbar ist (ist $ABADAEBC$ in CCA überführbar)?

Emil Post hat 1947 die "rekursive Unlösbarkeit" des Thue-Wortproblems bewiesen, das heißt, daß es kein allgemeines Verfahren zur Lösung gibt. Semi-Thue-Systeme erwiesen sich aber in den fünfziger Jahren als Modelle zur Beschreibung formaler syntaktischer Strukturen der natürlichen Sprache sehr brauchbar (N. Chomsky). Backus und Naur verwendeten eine auf Umformung basierte Notation, um eine formale Definition der Programmiersprache ALGOL-60 (Algorithmic Language) zu besorgen. Umformungsprogramme, Umschreibesysteme von Zeichenketten waren also gleichsam linguistische Wachstumsprogramme. 1968 führte der Biologe Aristid Lindenmayer neue Zeichenketten-Umschreibemechanismen ein, die später sogenannten L-Systeme, wo alle Buchstaben eines Wortes parallel und simultan, nicht sequentiell wie bei Chomsky, ersetzt werden. Die einfachste Klasse der L-Systeme sind die deterministischen kontextfreien L-Systeme, DOL-Systeme genannt. Wenn wir eine Zeichenkette aus den Buchstaben a und b haben und die Umformungsregeln $a \to ab$ und $b \to a$ und das Axiom b gegeben sind, dann erhalten wir am Ende der Entwicklung die in der Abbildung 1.23 wiedergegebene Sequenz.

Dieser Formalismus kann benutzt werden, um die Entwicklung von Zellen zu simulieren. Die komplexen Formalismen der L-Systeme werden zum mathematischen Instrument, Wachstumsprozesse zu simulieren.

Przemslaw Prusinkiewicz und Aristid Lindenmayer haben die "algorithmische Schönheit der Pflanzen" [Prusinkiewicz und Lindenmayer, 1990] gezeigt. Die Sprache der Mathematik beschreibt besser denn je die Entwicklung von Pflanzen. Mit Hilfe der auf den L-Systemen aufgebauten formalen Produktionssystemen können Pflanzen im Computer perfekt simuliert werden. Geometrische Eigenschaften von Pflanzen wie bilaterale Symmetrie der Blätter, Rotationssymmetrie der Blumen etc. werden durch die Eigenschaft der Selbstsimilarität (eine schwächere Symmetrie) ergänzt. Selbstähn-

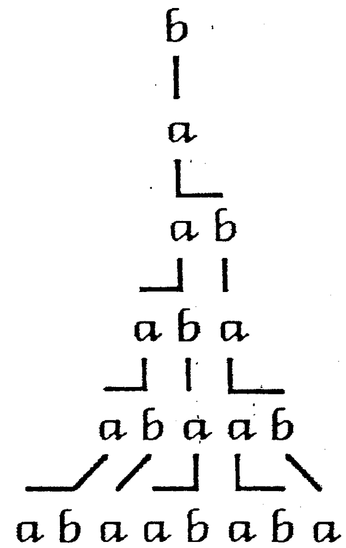

Abbildung 1.23. Beispiel einer Ableitung in einem DOL-System.

lichkeit entsteht dort, wo ein Teil einer Form geometrisch ähnlich dem Ganzen der Form ist. Selbstsimilarität verbindet daher Pflanzenstrukturen mit fraktaler Geometrie. Selbstsimilarität in Pflanzen ist das Ergebnis von Entwicklungsprozessen, welche "die Form eines Organismus zu einem Ereignis in Raum und Zeit" (Thompson) machen. Nicht mehr die Form von Organismen der Natur wird statisch visuell simuliert, sondern das Gesetz des dynamischen Wachstums dieser Organismen wird mathematisch simuliert. Wir können den Prozeß des Wachsens simulieren, nicht nur dessen Ergebnis: die Form. Diese Entwicklungsalgorithmen werden vom Formalismus der L-Systeme erfaßt, die ein Teil der Theorie der formalen Sprache sind. Sie spielen heute im computergestützten Film, in der Kunst, in der Architektur bei morphologischen Prozessen eine zentrale Rolle.

Die Sprache der Natur wird in der Tat zu einer Sprache, zu einer formalen Sprache. Symmetrie, Selbstsimilarität, Fraktale etc. werden zu Elementen einer solchen formalen Sprache, die dem Verständnis dynamischer Prozesse des Wachstums und der Selbstorganisation dient.

Abbildung 1.24. Christa Sommerer und Laurent Mignonneau: Phototrophie, Eine interaktive Echtzeit-Computerinstallation, 1994

Anmerkungen

1 Das altchinesische "sakrale" Rechnen begann mit 2 (- -, weibliche oder weiche Linie) und 3 (-, männliche oder feste Linie).
Daraus leitet sich auch die Bewertung der Linien bei der Deutung des Hexagramms ab, den "acht Urbildern nach König Wen".
Leibniz hat übrigens 1703 die Vermutung aufgestellt, die altchinesichen Zahlentheorien seien ein sinnvolles Ordnungsprinzip des Weltbildes auf binärarithmetischer Basis: "Erklärung der binären Arithmetik, die sich einzig der Zahl-Zeichen 0 und 1 bedient; mit Bemerkungen über ihre Nützlichkeit und über den Sinn, den sie den alten chinesischen Zeichen Fo-his verleiht". (G. W. Leibniz: Zwei Briefe über das binäre Zahlensystem und die chinesiche Philosophie. Belser Presse 1969). "Das Überraschende daran ist, daß diese Arithmetik mit 0 und 1 den Schlüssel liefert zum Geheimnis der Linien-Zeichen eines alten Königs und Philosophen, genannt FO-HI, der vor mehr als viertausend Jahren gelebt haben soll und den die Chinesen als den Gründer ihres Reiches und ihrer Wissenschaft betrachten. Es gibt einige Linien-Zeichen, die man ihm zuschreibt" (Leibniz bezieht sich auch die Pa-kua, die "Acht Urbilder" oder Trigramme des FU HSI. Der legendäre Kulturschöpfer Chinas FU HSI soll zwischen 2953 und 2838 v. Chr. gelebt haben).
Leibniz fährt fort: "Sie haben alle Bezug auf diese Arithmetik; man braucht nur das sogenannte Acht-Cova-Zeichen einzusetzen, das als Grundzeichen gilt, und die Erklärung anzufügen, die ins Auge springt, nämlich daß erstens eine durchgehende Linie (——) eine Einheit oder 1 bedeutet und daß zweitens eine unterbrochene Linie (— —) für Null oder 0 steht. Die Chinesen wissen seit tausend Jahren nicht mehr, was die Cova-oder Linien-Zeichen des FO-HI bedeuten; sie haben Kommentare darüber verfaßt, in denen sie einen, ich weiß nicht wie weit hergeholten Sinn für diese Zeichen suchten, so daß die RICHTIGE ERKLÄRUNG JETZT VON DEN EUROPÄERN KOMMEN MUSSTE".

Maria-Louise von Franz, [illegible]ülerin von C. G. Jung, vertritt die Theorie, daß die altchinesische Zahlenauffassung mit der Idee des Zahlenfeldes verknüpft ist, in dem die einzelnen Zahlen als "rhythmische Konfigurationen" auftreten: "In den entsprechenden 'Weltmodellen' und mathematischen Gottesbildern dominiert die Bedeutung der ersten vier Zahlen in besonderem Maße, enbso in den systematisierten Divinationstechniken der Vergangenheit". Im Klappentest ihres Buches "Zahl und Zeit. Psychologische Überlegungen zu einer Annäherung von Tiefenpsychologie und Physik" (Stuttgart [Klett] 1970) wird bemerkt: "Der Archetypus (im Sinne C. G. Jungs) wird in seinem Ordnungspaket, als welcher sich die Zahl erweist, zu einer neuen naturwissenschaftlich beschreibbaren Grundlage, die einer Reihe von Disziplinen gemeinsam ist". Übrigens stammt auch das älteste magische Quadrat aus China. Es wurde dem Kaiser Yü durch die heilige Schildkröte vom Flusse Lo zugebracht:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2 Beachtenswert sind die Überlegungen, die Bombieri hierzu vorbringt: "There are very many old problems in arithmetic whose interest is practically rich, e.g. the existence of infinitely many Fermat primes $2^{2^n} + 1$ etc. Some of the questions may very well be undecidable in arithmetic; the construction of arithmetical models in which questions of this type have different answers would be of great importance". (in: Browder, Hg.,: Mathematical Developments arising from Hilberts's Problems. Proc. Symp. Pure Math. 28 (1976), American Mathematical Society, II, A, S. 36).

3 Doch auch in der Gegenwart zeitigten die Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen noch sehr brauchbare Resultate. Matyasevic hat in seiner berühmten (negativen) Lösung des 10. Hilbertschen Problems die Reihe der Fibonacci-Zahlen wesentlich benützt, da diese exponentiell (also stark) wächst und diophantisch definierbar ist. Die Fibonacci-Reihe ist die erste bekannt gewordene exponentiell wachsende Folge in der Literatur. Diesem historischen Faktum verdankt sie viel von ihrer Faszination und Stellung.

4 "Musik ist eine verborgene arithmetische Übung des seines Zählens unbewußten Geistes", lautet die Definition der Musik bei Leibniz. Bachs Goldberg-Variationen (1742) für Cembalo, dreißig Variationen, auf einem durchgehenden Passacaglia-Bass aufgebaut, sind ein berühmtes Beispiel für musikalisch-mathematische Proportionen. Vergleiche auch die rationale Ästhetik der homophonen Kompositionstechniken der monodischen Harmonielehre, welche die Einführung des Generalbasses in die Musikgeschichte mit sich brachte, bei Monteverdi, dem Begründer der modernen Musik.

5 Da wir die Geduld des Lesers nicht weiter beanspruchen wollen, beenden wir hier diese kleine Exkursion in die Zahlentheorie mit einem Ausblick auf die noch möglichen Felder und Probleme, als da sind: die Abbildung von verschiedenen Quadraten in einem Quadrat, die numerischen magischen Quadrate, die Inversion des Kreises, die Fermatschen Zahlen, Transformationen, Partial-Funktionen, numeri idonei, die Wurzelschnecke, das harmonische Dreieck, die Pascal'sche Schnecke, das Diagonalverfahren, die Zahl der Universalbibliothek, die Reihen, die logarithmische Spirale, die Symmetrie, die Möbius-Schleife, usw. All diese numerischen und geometrischen Merkwürdigkeiten haben in der Geschichte der bildenden Kunst, Architektur und Musik ihre tiefgreifende Wirkung gezeitigt, besonders im 20. Jahrhundert.

[Basieux, 1999] Basieux, P. (1999). *Abenteuer Mathematik*, Rowolt.

[Coleman und Holmes, 1988] Coleman, W. und Holmes, F. L. (1988). *The Investigative Enterprise. Experimental Physiology in Nineteenth Century Medicine*. Univ. California Press.

[Conway und Guy, 1996] Conway, J. H. und Guy R. K. (1996). *The Book of Numbers*. Springer, New York.

[Cook, 1979] Cook, T.A. (1979). *The Curves of Life*. Nachdruck der Ausgaben 1914 bei Dover Publ., N.Y.

[Derlin, 1998] Derlin K. (1998). *Life by the Numbers*. Wiley.

[Deutsch, 1985] Deutsch, D. (1985). Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proc. of the Royal Society of London*, 400, S. 97.

[Frängsmyr et al., 1984] Frängsmyr, T., Heilbron, J. L. und Rider, R. E. (1984). *The Quantifying Spirit in the Eighteenth Century*. Univ. of California Press.

[Ghyka, 1977] Ghyka, M. (1977). *The Geometry of Art and Life*. Dover, N.Y. Seite 85.

[Hangenmaier, 1977] Hangenmaier, O. (1977). *Der Goldene Schnitt*, Moos Verlag, München 1977.

[Hoffman, 1998] Hoffman P. (1998). *The Man Who Loved Only Numbers*. Fourth Estete, London.

[Hug-Hellmuth, 1916] Hug-Hellmuth, H.v. (1916). *Einige Beziehungen zwischen Erotik und Mathematik*, S. Freud, Hrsg., Hugo Heller Verlag, Bd. 4, S. 52.

[Mandelbrot, 1983] Mandelbrot, B.B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, N.Y.

[Prusinkiewicz und Lindenmayer, 1990] Prusinkiewicz, P. und Lindenmayer, A. (1990). *The Algorithmic Beauty of Plants*. Springer, N.Y.

[Singh, 1998] Singh, S. (1998). *Fermats letzter Satz*. Maurer, München.

[Stewart, 1995] Stewart, I. (1995). *Nature's Numbers*. Basic Books.

[Thom, 1972] Thom, R. (1972). *Théorie Dynamique de la Morphogenése*. Benhamin, N.Y.

[Thom, 1974] Thom, R. (1974). *Modéles Mathémathiques de la Morphogenése*. Paris.

[Thompson, 1966] Thompson, D'Arcy (1966). *Über Wachstum und Form*. Basel 1973. Seite 223. Übersetzung der Ausgabe von 1966, Cambridge Univ. Press.

[Turing, 1952] Turing, A. M. (1952). The Chemical Basis of Morphogenesis. *Phil. Trans. R. Soc. London*, Ser. B 327, 37.