Kurt Gödel und die mathematische Logik

Modallogik und Deontik, K44-Lo7

Werner DePauli-Schimanovich und Peter Weibel S. 497-504

Es ist ein altes Problem der Philosophie, einen Zusammenhang herzustellen zwischen der Welt, wie sie ist, und der, wie sie sein sollte. Der frühe Wittgenstein anerkennt nur das Faktische: „Die Welt ist alles, was der Fall ist.“ Das Prinzip der Hoffnung von Ernst Bloch schließt auch das Latente mit ein: „Die Welt ist auch alles, was nicht der Fall ist.“ Und Hegel sagt: „Alles Wirkliche ist vernünftig und alles Vernünftige ist notwendig.“ Die Kluft, welche sich zwischen Wirklichkeit, Vernunft und Notwendigkeit auftut, überwindet er durch den Weltgeist – jenem Logos, der Dr. Faustus noch entgegen ruft: „Du gleichst dem Geist, den du begreifst, nicht mir!“

Diesem Ontologischen System von Hegel, welches die Verbindung herstellt zwischen existentiellen Aussagen über die Wirklichkeit und modalen Sätzen über mögliche Welten, stellten die Autoren ein Korrespondenz-System entgegen zwischen Existenz- und All-Aussagen der Prädikatenlogik und kontingent/normativen Sätzen der Modallogik, Deontik und Epistemik. In Analogie zum Weltgeist, der Wirklichkeit und Notwendigkeit miteinander vereint, wird in dieser Arbeit ein Isomorphismus konstruiert, der Prädikatenlogik und Modallogik aufeinander abbildet: Ein Versuch mit dem Ziel, die Welt mit ihrem Wunschbild zu versöhnen.

Diese Versöhnung durch die versuchte Konstruktion eines Isomorphismus zwischen den verschiedenen Systemen der propositionalen Modallogik (T, S0.5, S4, S5, etc.) und den ihnen entsprechenden Teilen der Prädikatenlogik wurde bereits im (vorhergehenden) Artikel „Formel-Homomorphismen zwischen Logischen Theorien“ (K44-Lo4) begonnen. In diesem Artikel soll eine solche Korrespondenz jedoch für die prädikatenlogische Modallogik versucht werden.

Betrachten wir zuerst S5* + BF, die FOL (= First Order Logik) oder PL1 (= Prädikaten-Logik 1. Stufe) zusammen mit den S5 Axiomen und der Barcan-Formula:

$\Box A \rightarrow A$	(NA) Notwendigkeits-Axiom
$\Box (A \rightarrow B) \rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$	(DN) Distribution des Nezessors
$\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$	(S5) S5-Axiom
$\bigwedge_x \Box A \rightarrow \Box \bigwedge_x A$	(BF) Barcan-Formula

wobei A immer eine n-stellige Formel sein soll mit beliebigen natürlichen n.

Mit (∀) bezeichnen wir den Allabschluss; das ist die Kette

$$\bigwedge_{x1} \ldots \bigwedge_{xi} \ldots . \bigwedge_{xn},$$

wobei nur frei vorkommende x_i verwendet werden. Bilden wir nun alle Formeln von S5* + BF derart auf die PL1 ab, dass jeder Modaloperator □ durch einen Allabschluss (∀) ersetzt wird, dann sehen wir sofort, dass die Barcan-Formula dadurch erfüllt bleibt.

$\bigwedge_{x} \Box A \to \Box \bigwedge_{x} A \Longrightarrow \bigwedge_{x} (\forall) A \to (\forall) \bigwedge_{x} A$

Analoges gilt für die Umkehrung der BF, die bereits ein Theorem (Th1) von T ist (und daher auch von S5).

$\Box \bigwedge_{x} A \to \bigwedge_{x} \Box A \Longrightarrow (\forall) \bigwedge_{x} A \to \bigwedge_{x} (\forall) A.$

Nennen wir diesen Formel-Homomorphismus $\Longrightarrow$ von S5* + BF in die FOL einfach FH1, so erzeugt er sicher eine Teilmenge PL1 / S5* + BF von FOL. Da jedoch auch jede nicht nezessierte (also rein prädikatenlogische) Formel in S5* + BF vorkommt, welche unter FH1 gleich bleibt, ist PL1 / S5*+BF identisch mit PL1. Da man umgekehrt durch die inverse Abbildung (also durch die Ersetzung des Allabschlusses durch einen Nezessor) jede Formel aus S5*+BF erzeugen kann, liefert diese Ersetzung $\Longleftrightarrow$ einen Isomorphismus FI1.

Nun suchen wir nach einem FH2 von S5* in PL1, der nicht die Barcan-Formula erfüllt. Dabei wird man beispielsweise „beschränkte Abschlüsse" untersuchen, zum Beispiel die Abbildungen von $\Box$ auf ($\forall$-1) oder ($\forall$-n) oder ($\forall$ gerade) oder ($\forall$ gerade freie), etc. betrachten. Wir sehen dann sofort, dass ($\forall$-1) zwar die Barcan-Formula erfüllt, aber nicht das Theorem Th1 von T (schon bei $A^2 = A(x, y)$).

Th1 $\not\dashv \Box \Longleftrightarrow (\forall\text{-}1) \models$ BF.

Nun betrachten wir einen FH3 wo der Nezessor ersetzt wird durch einen Allquantor mit der 1. (von links nach rechts auftauchenden) freien Variablen. (Wir denken uns die freien Variablen von A von 1 bis n durchnummeriert.) Dann ergibt sich:

$\Box \bigwedge_{x1} A(x1, x2) \to \bigwedge_{x1} \Box A(x1, x2) \Longrightarrow \bigwedge_{x2} \bigwedge_{x1} A(x1, x2) \to \bigwedge_{x1} \bigwedge_{x1} A(x1, x2),$

das heißt die Variable x2 wird nach der Implikation frei, weil $\Box$ ja bei der Erstellung die 1. freie Variable von A bindet und die ist x1. Die ersetzte Formel ist eine Instanz des 4. Frege-Lukasiewicz-Axioms und daher eine prädikatenlogisch wahre Formel. FH3 ist in diesem Fall also wahrheits-erhaltend und erfüllt Th1. Nicht jedoch BF:

$\bigwedge_{x1} \Box A(x1, x2) \to \Box \bigwedge_{x1} A(x1, x2) \Longrightarrow \bigwedge_{x1} \bigwedge_{x1} A(x1, x2) \to \bigwedge_{x2} \bigwedge_{x1} A(x1, x2),$ was offenbar falsch ist.

FH3 erfüllt die beiden T-Axiome, aber schon nicht mehr (S4)
$\Box A \to \Box \Box A.$

(Die Umkehrung folgt aus (T1) = (NA).) Daher auch nicht (S5), welches ja (S4) impliziert. Wir müssen daher weiter suchen nach einem FH, welcher S5* ohne BF wahr lässt. FH muss nicht so einfach sein, wie die bisher betrachteten Fälle.
Er kann beispielsweise (1) über Mengen von Formeln definiert sein, zum Beispiel für alle $\{A^n: n \in \mathbb{N}\}$, wobei auch Dummy-Variablen auftreten können. Oder für $\{A^n\}_n$, wo n die quantorisch-modale Tiefe von A sein soll. Oder $\{A^m: m \le n\}_n$.

FH kann (2) rekursiv aufgebaut sein. Man zeigt dann, dass die modalen Axiome eines Systems in prädikatenlogisch wahre Formeln übergehen, also:

$\vdash_{ML} A \nearrow\!\searrow \vdash_{PL1} FH(A)$,
wobei ML ein passendes modallogisches System ist.

Es kann (3) auch die Anzahl der Ableitungs-Schritte beschränkt werden oder die der Modal-Operatoren oder die Länge der Operator–Folgen (beziehungsweise Quantoren-Folgen).
Also zum Beispiel:

Länge ($\Box$-Folgen) $\le$ Konstante.

Nachdem ein FH für eine ML gefunden wurde, soll geprüft werden, ob er nicht auch ein Isomorphismus FI ist, beziehungsweise ob es nicht einen anderen ähnlichen FH gibt, der auch ein FI ist. In diesem Fall kann man eine Entscheidungs- beziehungsweise Erfüllbarkeits-Äquivalenz definieren.

Anstatt PL1 (beziehungsweise FOL) können auch Fragmente davon betrachtet werden, zum Beispiel PLun (= die unäre PL1) oder PLbin (= die binäre PL1), etc.

Durch solche komplizierten FH beziehungsweise FI kann beispielsweise auch eine Korrespondenz zwischen S5* ohne BF und TPL1 (= einem Teil von PL1) hergestellt werden. Sei zum Beispiel

$FH5(\Box) = \bigwedge_{x},$

wobei x diejenige Variable ist, welche der nächst-äußere Nezessor zugeordnet bekam, beziehungsweise wenn es keinen gibt: der nächst-äußere Quantor bindet, beziehungsweise wenn es auch keinen solchen gibt: die nächste freie Variable von A. Man sieht sofort, dass FH5 die 4 Reduktions-Gesetze von S5 erfüllt, ebenso Th1 von T, jedoch nicht BF. FH5 ist sogar ein Isomorphismus auf PL1, sollte jedoch exakt auf rekursive Weise von außen nach innen definiert werden.

Analog können FHn für das Brouwer System B mit dem Brouwer-Axiom (B)
$A \to \Box \Diamond A$ gesucht werden.

Ebenso für das System S4.2 von Geach, Dummet und Lemmon mit dem Axiom (S4.2)
$\Diamond \Box A \to \Box \Diamond A,$
wobei wir wissen, dass $\Box A \to \Diamond \Box A$ und $\Box \Diamond A \to \Diamond A$ gelten. Es bleibt jedoch fraglich, ob es auch einen passenden FI für S4 gibt. Die Autoren waren in dieser Frage bisher nicht erfolgreich.

Als nächstes wollen wir uns der Charakterisierung der Deontischen Operatoren durch beschränkte Quantoren-Folgen zuwenden. Ähnliche Methoden, wie sie bei der Projektion der Modallogik auf die Prädikatenlogik vorgenommen werden (siehe Abstract von Peter Weibel), können auch auf die Deontische Logik angewendet werden. Hier wird der Deontik-Operator „!“ (Geboten) jeweils nach einem bestimmten Konstruktionsverfahren durch eine Folge von beschränkten Allquantoren ersetzt. Die Konstruktion der Quantoren-Folge hängt vom verwendeten logischen oder prädikatenlogischen Deontik-System (Von Wright, Hintikka, Grelling, Mally, etc.) ab. Ein korrekter Konstruktions-Algorithmus darf trivialerweise durch die symbolische Ersetzung keine in der PL1 nicht ableitbaren Formeln erzeugen.

Umgekehrt lassen sich gewisse Quantorenfolgen durch die Deontik-Operatoren Geboten $\overset{\nabla}{\circ}$ oder Erlaubt „$\overset{\circ}{\Delta}$“ ersetzen, wodurch Teile der Prädikatenlogik in ein deontisches System übergehen. Entstehen bei dieser Ersetzung ebenfalls die Axiome dieses Systems (Vollständigkeit) und kann gezeigt werden, dass durch die Transformation keine weiteren (im System nicht herleitbaren) Sätze gebildet werden (Korrektheit), so stellt der Algorithmus einen Formel-Isomorphismus zwischen dem Deontik-System und einem Teil TPL der PL1 her. Eine solche formale Korrespondenz zwischen DL_i und TLP_i charakterisiert, falls sie überhaupt existiert, das entsprechende System der Deontischen Logik auf eindeutige Weise.

Betrachten wir zunächst das Deontik-System C von Von Wright mit den Axiomen (C1) bis (C3):

$\overset{\nabla}{\circ} A \rightarrow \neg \overset{\circ}{\Delta} \neg A$ (Definition „Erlaubt“)

$\overset{\circ}{\Delta} A \vee \overset{\circ}{\Delta} \neg A$ (PP: Principle of Permission)

$\overset{\circ}{\Delta} (A \vee B) \leftrightarrow \overset{\circ}{\Delta} A \vee \overset{\circ}{\Delta} B$ (DD: Deontic Distribution)

Natürlich gibt es eine Ähnlichkeit zwischen Modallogik und Deontik aber in der ML gilt: „Ab Esse ad Posse“, hingegen in der DL gilt nicht: „Ab Esse ad Permisse“. Also:

$A \rightarrow \Diamond A$, aber: $A \not\rightarrow \overset{\circ}{\Delta} A$.

In C ist das (PC: Principle of Contingency) nicht allgemeingültig, welches in 2 Meta-Axiome (C4a) und (C4b) aufgesplittert wird:

$\not\Vdash \overset{\nabla}{\circ}(A \vee \neg A)$ (“Es ist nicht allgemein-gültig, dass Wahres auch geboten ist!”)
$\not\Vdash \neg \overset{\circ}{\Delta} (A \,\&\, \neg A)$ („Es ist auch nicht allgemein-gültig, dass Widersprüche verboten sind.“)

Die beiden Formeln sind natürlich äquivalent; daher genügt nur 1 Meta-Axiom. Für Von Wright sind sie logisch nicht falsch; für andere Autoren sind sie jedoch natürlich. Sie folgen jedenfalls nicht aus C1 bis C3:

(C1) & (C2) & (C3) $\not\vdash$ (C4), weshalb (C4) retundant ist. Jedoch die Extensionalitäts-Regel (C5) benötigen wir explizit:

$A \leftrightarrow B \vdash^{1} \overset{\circ}{\Delta} A \leftrightarrow \overset{\circ}{\Delta} B$.

Man beachte natürlich, dass die reinen „Prädikate“ in der Deontik keine Aussagen sind, sondern „Akt-Prädikate“ (= Handlungen, Acts). Erst durch einen vorangestellten deontischen Operator werden sie zu Aussagen. Daher sind auch beispielsweise folgende Zeichenreihen sinnlos, weil sie keine wohlgeformten Formen der Deontik sind:

$\not\models \overset{\nabla}{\circ} \overset{\circ}{\Delta} A$, $\not\models A \rightarrow \overset{\nabla}{\circ} A$, etc.

Wrights System C ist mittels Wahrheits-Tafeln entscheidbar.

Da keine iterierten Deontik-Operatoren auftreten können, genügen FH in die PLun. Wegen der Ungültigkeit des Analogons zur Modallogik

$\overset{\nabla}{\circ} A \not\rightarrow A$ und $A \not\rightarrow \overset{\circ}{\Delta} A$ sollte man beispielsweise ein Existenz- beziehungsweise Realitäts-Prädikat R(x) einführen (= x hat eine reale Existenz). Wir betrachten dann FH6($\overset{\nabla}{\circ}$) = Δ (Delta) und FH6($\overset{\circ}{\Delta}$) = ∇ (Nabla), wobei

$\nabla A \not\rightarrow A$ und $A \not\rightarrow \Delta A$, falls

$\Delta A := \bigwedge_x (Rx \rightarrow Ax)$ und

$\nabla A := \bigvee_x (Rx \,\&\, Ax)$ sein soll.

Denn es gilt dann nur

$\Delta A \rightarrow \; Rx \rightarrow Ax$ und
$Rx \,\&\, Ax \rightarrow \nabla A$.

Die mittleren Teile sind jedoch verschieden und $\neq$ A. Beispiel:

Aus $\bigwedge_{n \leq 10} \sqrt{n} \neq 3{,}3 \not\rightarrow$ (folgt beispielsweise nicht) $\sqrt{n} \neq 3{,}3$.

Für Delta und Nabla gilt jedoch:

$\Delta A \rightarrow \nabla A$.

Die hier beschriebene Methode der Einbettung in die Prädikatenlogik durch Formel-Isomorphie kann auch auf die Epistemische Logik angewandt werden.